

ORSAY

SÉRIE A, N°

N° D'ORDRE :

737

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

BERTHE ép. BOUJOT Jacqueline



1^{re} THÈSE : Sur le contrôle linéaire d'un système soumis à une excitation aléatoire. Application à la tenue d'un avion en atmosphère turbulente.

2^e THÈSE : Etude théorique des équations des fluides de Bingham.

Soutenues le 4 février 1971 devant la Commission d'examen.

MM. R. MAZET Président

GUIRAUD

TEMAM

COUPRY

} Examineurs.

O. N. E. R. A.

29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON

1971

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

BERTHE ép. BOUJOT Jacqueline



1^{re} THÈSE : Sur le contrôle linéaire d'un système soumis à une excitation aléatoire. Application à la tenue d'un avion en atmosphère turbulente.

2^e THÈSE : Etude théorique des équations des fluides de Bingham.

Soutenues le 4 février 1971 devant la Commission d'examen.

MM. R. MAZET Président

GUIRAUD

TEMAM

COUPRY

} Examineurs.



AVANT PROPOS

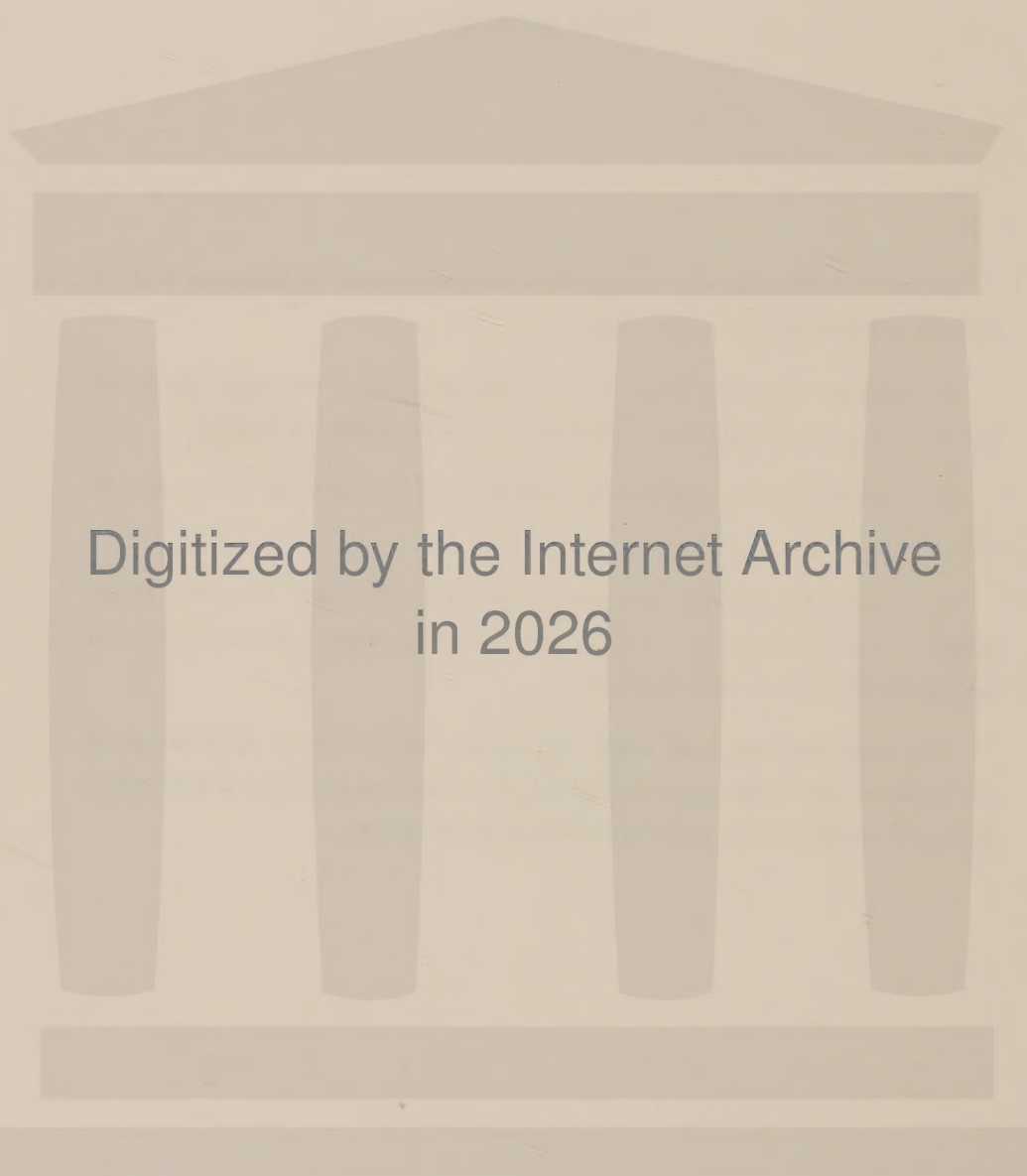
Je tiens à adresser ma respectueuse reconnaissance à Monsieur MAZET qui m'a fait entreprendre cette étude.

Je voudrais exprimer aussi ma profonde gratitude à Monsieur GUIRAUD qui, par ses conseils patients, m'a permis de mener à bien ce travail.

Je remercie également Monsieur TEMAM d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je ne veux pas omettre de remercier Monsieur COUPRY, Directeur Scientifique à l'O.N.E.R.A., de l'aide et des encouragements constants qu'il m'a prodigués au cours de mes recherches.

Mes remerciements vont enfin aux équipes de recherche de la direction « Résistance des Structures » de l'O.N.E.R.A., qui ont participé à différentes phases de vérifications et à l'exploitation des résultats.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543714_0039

TABLE DES MATIÈRES

	PAGES
RÉSUMÉ - SUMMARY	2
NOTATIONS - SYMBOLES	3
INTRODUCTION	4
I. SYSTÈMES LINÉAIRES PHYSIQUEMENT RÉALISABLES	5
I,1. Etude préliminaire	5
I,2. Propriétés des espaces $\mathcal{V}$ et $\mathcal{X}$	8
I,3. Systèmes linéaires physiquement réalisables	11
I,4. Systèmes stationnaires à entrées aléatoires	12
I,5. Généralisation : systèmes d'ordre quelconque	13
II. PROBLÈME D'OPTIMISATION. ÉTUDE GÉNÉRALE	16
II,1. Problème	16
II,2. Résolution dans $\mathcal{X}$	18
II,3. Comparaison des suites minimisantes	21
III. RÉOLUTION GÉNÉRALE. UNE FORME EXPLICITE DE LA SOLUTION	23
III,1. Position du problème	23
III,2. Condition extrême. Propriétés du minimum	25
III,3. Propriétés générales de l'équation intégrale (III,2)	26
III,4. Hypothèses	27
III,5. Détermination et propriétés de la solution rationnelle	28
III,6. Fonction spectrale quelconque. Perturbation de la solution précédente	31
III,7. Méthode générale de résolution	33
IV. VOL D'UN AVION EN ATMOSPHÈRE TURBULENTE	35
IV,1. Turbulence atmosphérique	35
IV,2. Réponse de la structure en vol	38
IV,3. Éléments statistiques de la réponse	41
IV,4. Optimisation de la réponse en vol longitudinal	43
V. APPLICATIONS	47
V,1. Position du problème	47
V,2. Avion rigide. Recherche d'une loi optimale et analyse d'un dispositif amortisseur de turbulence	49
V,3. Optimisation de la réponse de l'avion souple	52
V,4. Défauts de gains dus à une erreur dans la restitution de $W(t)$	54
V,5. Conclusion	56
ANNEXE I. ÉTUDE DE L'AVION RIGIDE	57
ANNEXE II. ÉTUDE DE L'AVION SOUPLE	63
RÉFÉRENCES	65



SUR LE CONTROLE LINÉAIRE D'UN SYSTÈME SOUMIS A UNE EXCITATION ALÉATOIRE
APPLICATION A LA TENUE D'UN AVION EN ATMOSPHÈRE TURBULENTE

par Jacqueline BOUJOT

RÉSUMÉ

Cette étude traite un problème général d'optimisation dans le but de former une expression linéaire intrinsèque de la commande susceptible de s'appliquer au contrôle de systèmes réels complexes tels qu'un avion en atmosphère turbulente.

L'analyse mathématique est basée sur une étude préalable approfondie de la notion de « systèmes linéaires physiquement réalisables », qui sont caractérisés d'un point de vue fonctionnel.

Le problème est résolu complètement sur l'espace normé ainsi défini et la résolution est associée à des résultats déduits de la théorie du contrôle optimal. Elle conduit à une forme aisément exploitable de la solution.

Les propriétés des vols en air turbulent et des caractéristiques aéroélastiques des structures sont analysées ensuite. Elles permettent de formuler le problème de l'optimisation du pilotage en turbulence, puis de le rapporter au traitement général des équations précédentes.

L'application proprement dite aboutit à la construction « d'amortisseurs de turbulence » dont les qualités et les propriétés sont discutées d'un point de vue technique.

Descripteurs (thésaurus CEDOCAR) : Systèmes linéaires – Optimisation – Commandes optimales – Réponse – Dynamique – Propriétés structures – Turbulence – Atmosphère – Rafales – Charges rafales – Amortisseurs –

A LINEAR CONTROL OF SYSTEMS WITH RANDOM INPUTS
APPLICATION TO GUST RESPONSE CONTROL

SUMMARY

A general optimization problem giving a standard linear expression of control is applied to complex, actual systems such as aircraft flying in turbulence.

The first part is devoted to the axiomatic definition of « physical linear systems » from a functional point of view.

With the help of optimal control theory, which gives a closed form expression in special cases, the problem is solved in a more general way in the normed space previously defined. An easily workable expansion of the solution is deduced.

The analysis of gust response properties of a structure in flight yields the formulation and the solution for the optimal gust response control of an aircraft.

By applying this method it is possible to design gust response control devices whose properties and qualities are discussed from a technical point of view.

Descriptors (NASA thesaurus) : Linear equations – Linear systems – Dynamic characteristics – Optimization – Flight optimization – Optimal control – Dynamic response – Dynamic structural analysis – Atmospheric turbulence – Gusts – Gust loads – Random loads – Gust alleviators –

NOTATIONS - SYMBOLES

	PAGES		PAGES
$\alpha^+ \alpha^-$	5 - 24	$\ell_n(\omega)$	10
$\mathcal{B}$	9	$\ell^1 \ell^2$	6 - 9
D_z	33	$\mathcal{L}^2(\mu_e), \mathcal{L}^2$	9 - 10
$\delta(t)$	7	m	18
$E(\)$	12	$G_m G'_c$	6
$(\mathcal{F}g), (\overline{\mathcal{F}}G)$	6	$\phi_e \phi_s \phi_b$	12 - 18
$f_p(\omega), f_p^*(\omega)$	6	$\varphi_e(\omega)$	23
$G(s)$	25	$\varphi_w(\omega)$	37
g^-	27	$\varphi_e(P)$	38
$\mathcal{H}$	9	$q_e(t), \tilde{q}_e(\omega)$	38 - 41
$\mathcal{I}$	17	R, R^+	6 - 7
$\mathcal{I}_m$	25	R_e partie réelle de $S_\ell(P)$	40
$\mathcal{K}$	8	$S(P, t)$	43
K	17	σ_e^2, σ_s^2	12
$K_m(s)$	25	$\mathcal{S}, \mathcal{S}'$	6
L	36	$\mathcal{T}$	8
$(\mathcal{L}\mu)$	6	$V \hat{V}_N$	19 - 20
$(L\mu)$	24	$W(t)$	36

INTRODUCTION

Les problèmes d'optimisation des systèmes linéaires excités par des processus aléatoires sont classiques depuis les travaux consécutifs à la théorie de **Wiener** sur le filtrage optimal.

Le présent travail en traitant un problème du type précédent est orienté par deux préoccupations :

1. Définir d'une manière cohérente l'espace des systèmes physiquement représentables. En déduire une résolution du problème qui permette d'élaborer une commande linéaire générale aisément exploitable.
2. Traiter à partir de cette base théorique le problème de la tenue d'un avion en atmosphère turbulente.

L'ensemble de l'étude est analysée en cinq chapitres. Les trois premiers sont consacrés à l'établissement et au rappel de notions théoriques, les deux autres à l'analyse des propriétés des vols en air turbulent et à la définition d'un « optimiseur de rafales ».

Le premier chapitre vise à établir une axiomatique caractérisant la notion physique de représentabilité. Les réponses impulsionnelles sont définies au sens des distributions et forment un espace vectoriel de dimension infinie $\mathcal{S}$. La définition sur $\mathcal{K}$, homologue de $\mathcal{S}$, d'une métrique compatible avec la notion de stabilité est nécessaire pour traiter des questions de convergence et pour former sur l'espace une base réalisable avec une série de filtres récurrents.

Les propriétés de l'espace normé $\mathcal{K}$ permettent de résoudre sous une forme générale le problème d'optimisation posé dans le chapitre II. Les systèmes envisagés sont ceux dont l'équation d'état s'exprime en fonction de l'excitation aléatoire $e(t)$ et de la commande $u(t)$ par une équation de convolution de la forme

$$S(t) = (\mu * e)(t) + (\nu * u)(t).$$

Dans le but de définir une commande linéaire représentable u qui minimise la variance de $S(t)$ sans modifier les caractéristiques du système, l'existence d'un minimum unique, approché sur $\mathcal{K}$ est établie ainsi qu'une expression développée aisément maniable, de la commande,

Au cours du chapitre III, il a été indispensable de reprendre une forme classique de résolution, tant pour analyser les propriétés de la solution optimale, que pour lever les difficultés posées par la convergence du procédé. Des méthodes déduites de la théorie de **Wiener** sont ainsi précisées et développées. Leur application et les résultats II permettent de former une expression explicite de la commande, intéressante pour l'exploitation numérique et mieux adaptée aux critères de convergence et aux variations des formes spectrales.

Ces bases théoriques étant établies les chapitres suivants traitent de leur application au problème du pilotage d'un avion en atmosphère turbulente. En ce qui concerne l'optimisation de la réponse des avions, de nombreuses solutions existantes aboutissent à la construction des autostabilisateurs usuels sans avoir recours à une pratique générale des théories de l'optimisation. La méthode étudiée ici répond à cette préoccupation.

Le problème théorique du pilotage en turbulence est développé dans le chapitre IV par un formalisme déduit des études de l'aéroélasticité classique et de la représentation de la structure au moyen du schéma modal. La réponse de la structure est ainsi définie avec un souci de généralité qui permet de rapporter le sujet aux méthodes analysées dans les chapitres II et III.

Le chapitre V avec ses annexes est consacré à l'application proprement dite et place le problème dans un contexte plus technique.

Le début de l'exposé est consacré à la définition d'un « optimiseur » sur l'avion rigide et permet de vérifier les hypothèses faites en IV en ce qui concerne la nature de la turbulence notamment. La suite du chapitre définit, à partir de l'exemple de l'avion souple les principes d'une résolution numérique générale, nécessaire d'une part pour obtenir la commande optimale, d'autre part pour en faire une étude systématique.

Les résultats numériques rapportés en annexes, sont extraits d'une étude, faite en ce sens, dans le cadre des recherches de l'O.N.E.R.A.

Chapitre I

SYSTÈMES LINÉAIRES PHYSIQUEMENT RÉALISABLES

Cette première partie a pour but de rappeler ou de définir les notions nécessaires aux développements ultérieurs.

A partir des propriétés connues des systèmes physiques linéaires on a pu établir une définition axiomatique de leurs réponses impulsionnelles.

Nous montrerons que ces réponses impulsionnelles sont des distributions tempérées réelles qui constituent les éléments d'un espace vectoriel $\mathcal{Z}$. Elles s'écrivent sous forme explicite à partir des fonctions de **Laguerre** classiques.

Considérant les systèmes à entrées aléatoires nous définirons sur l'espace des réponses harmoniques $\mathcal{K}$, homologue de $\mathcal{Z}$, une topologie compatible avec la notion fondamentale de stabilité; Nous déterminerons sur $\mathcal{K}$ une base dont les propriétés permettent de représenter tout système physique avec une série de filtres analogiques récurrents.

Ces propriétés se généralisent facilement aux systèmes d'ordre quelconque que l'on caractérise à partir de la notion de matrice impulsionnelle.

I. SYSTÈMES LINÉAIRES PHYSIQUEMENT RÉALISABLES

1,1. Etude préliminaire.

Dans cette étude, nous définirons les éléments mathématiques permettant de préciser la notion de « système physiquement réalisable ».

1,1.1. Fonctions holomorphes en tout point du demi plan complexe $Re\ s \geq 0$.

Soit $\mathcal{A}^*$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes en tout point du demi plan complexe $Re\ s \geq 0$ (où Re désigne « partie réelle de » et s la variable complexe $s = \xi + j\omega$)

$$(I,1) \quad \mathcal{A}^* = \left\{ L(s), L(s) \text{ holomorphe pour } Re\ s \geq 0 \right\}.$$

La propriété d'holomorphic a le sens suivant :

- la fonction $L(s)$ est holomorphe dans le demi plan ouvert $Re\ s > 0$ et à l'infini;
- il existe pour tout point de l'axe imaginaire pur, y compris le point à l'infini, un voisinage dans lequel $L(s)$ est holomorphe.

La transformation conforme $s \rightarrow W = \frac{1-s}{1+s}$ transforme le demi plan complexe en disque unité et l'ensemble des voisinages précédents en un recouvrement de la circonférence $|W|=1$. Il est possible d'en extraire un recouvrement fini qui contient une circonférence de rayon $r > 1$. La transformée de $L(s)$ est une fonction holomorphe dans le disque de rayon r .

On a ainsi pour $|W| \leq 1$ le développement absolument convergent

$$L\left(\frac{1-W}{1+W}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p W^p \quad \text{avec} \quad \sum_p |A_p| < \infty.$$

Par transformation réciproque

$$L(s) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \left(\frac{1-s}{1+s} \right)^p, \quad \sum_{p=0}^{\infty} |A_p| < \infty.$$

La propriété d'holomorphic correspond à $\{A_p\} \in \ell^1$ espace des suites sommables.

Proposition :

L'ensemble des fonctions de $\mathcal{A}^*$, se développe sous la forme

$$(I,2) \quad L(s) = \sum_p A_p \left(\frac{1-s}{1+s} \right)^p, \quad \sum_p |A_p| < \infty.$$

Pour $\operatorname{Re} s = 0$, soit $s = j\omega$, on obtient en particulier la série

$$(I,3) \quad L(j\omega) = V(\omega) = \sum_p A_p f_p(\omega), \quad \sum_p |A_p| < \infty.$$

La fonction holomorphe $f_p(\omega) = \left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega} \right)^p$, vérifie la relation $|f_p(\omega)| = 1$

pour tout p , et sa conjuguée $f_p^*(\omega)$ est telle que $f_p^*(\omega) = f_p(-\omega)$.

1.1.2. Rappels.

Avant d'établir les propriétés de $\mathcal{A}^*$ nous rappellerons un ensemble de définitions et de notations usuelles ([14], [19]). Nous désignerons par

$\mathcal{R}$: le corps des nombres réels,

$\mathcal{S}$: l'espace des fonctions complexes sur $\mathcal{R}$, indéfiniment dérivables, à décroissance rapide, dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide,

$\mathcal{S}'$: l'espace des distributions tempérées.

A toute fonction f de $\mathcal{S}$, la distribution $u \in \mathcal{S}'$ associe un nombre appelé intégrale de la fonction f par rapport à la distribution u et que nous noterons $\int f u$.

Le produit de convolution $(u * f)$ est défini d'autre part par la relation suivante

$$(u * f)(x) = \int f(x-y) u^y$$

où y représente la variable d'intégration et l'involution $u \rightarrow \tilde{u}$ par $\int f(y) \tilde{u}^y = \left(\int f^*(-y) u^y \right)^*$

$\mathcal{O}'_c$: l'ensemble des convolveurs de $\mathcal{S}'$ caractérisés par $T \in \mathcal{O}'_c \iff T * f \in \mathcal{S}$ pour tout $f \in \mathcal{S}$
 $\mathcal{O}'_c$ est l'espace des distributions à décroissance rapide,

$\mathcal{O}_m$: l'espace des multiplieurs sur $\mathcal{S}'$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions φ telles que $\varphi f \in \mathcal{S}$ quelle que soit f de $\mathcal{S}$. $\mathcal{O}_m$ est l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à croissance lente telles que $\varphi \in \mathcal{O}_m \iff \varphi$ est une fonction indéfiniment dérivable et toute dérivée $D^p \varphi$ est majorée par un polynome.

La définition de la transformée de **Fourier** que nous adopterons, correspond, pour toute fonction g de $\mathcal{S}$, à la relation

$$(\mathcal{F}g)(\omega) = G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} g(t) dt.$$

La transformée réciproque est alors

$$(\overline{\mathcal{F}}G)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} G(\omega) d\omega.$$

On définit de plus la transformée de **Laplace** d'une mesure μ à support positif par :

$$(\mathcal{L}\mu)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\mu(t).$$

Nous rappellerons le théorème suivant : ([19] II, p. 124)

« Les transformations $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ établissent deux isomorphismes réciproques entre $(\mathcal{O}_m)$ et $(\mathcal{O}'_c)$ et

échantent le produit de multiplication et le produit de composition».

1,1.3. Proposition.

La fonction $V(\omega)$ définie par (I,3) est la transformée de **Fourier** d'une distribution tempérée réelle sur R^+ $|V(\omega)| \leq \sum_p |A_p|$ $V(\omega)$ en tant que fonction bornée est une distribution tempérée qui admet sur $\mathcal{S}'$ une image par $\mathcal{F}$. Posons $T = \mathcal{F}V$ et cherchons une forme explicite de T .

Au sens des distributions tempérées, les fonctions $f_p(\omega)$ sont les transformées de **Fourier** de :
 $p=0$ $F_0 = \delta(t)$, $\delta(t)$ représente la mesure de **Dirac**

$$p \geq 1 \quad F_p = (-1)^p \left[\delta(t) + U(t) e^t \frac{d^p}{dt^p} \frac{e^{-2t} (t)^{p-1}}{(p-1)!} \right]$$

soit
$$F_p = (-1)^p \left[\delta(t) + U(t) e^{-t} \sum_{n=0}^{p-1} \binom{p-1}{n} (-2)^{p-n} \frac{t^{p-1-n}}{(p-1-n)!} \right]$$

$U(t)$ est la fonction d'**Heaviside**.

F_p est à support positif et il est immédiat de vérifier que $T_n = \sum_0^n A_p F_p$ est une mesure réelle bornée, sur R^+ , ensemble des nombres réels positifs ou nuls. Soit

$$V_n(\omega) = \sum_0^n A_p f_p(\omega) = (\mathcal{F} T_n)(\omega).$$

A toute fonction f de $\mathcal{S}$, T_n associe le nombre $T_n(f)$ que nous noterons $\int f T_n$.

$V_n(\omega)$ converge uniformément vers la fonction bornée $V(\omega)$, par conséquent, d'après le théorème de **Lebesgue** :

$$\int (\mathcal{F} T_n) \cdot f \rightarrow \int V \cdot f \text{ quelque soit } f \in \mathcal{S}.$$

Cette propriété traduit que $\mathcal{F} T_n \rightarrow V$ au sens de la topologie faible définie dans $\mathcal{S}'$, donc

$$T_n \rightarrow \mathcal{F}V = T \text{ dans } \mathcal{S}'.$$

T est limite dans $\mathcal{S}'$ d'une suite $\{T_n\}_n$ de mesures bornées réelles à support dans R^+ . Il vient :

$$(I,4) \quad \begin{cases} T = \sum_0^\infty A_p F_p & \sum_p |A_p| < \infty \\ T = A_0 \delta(t) + \sum_{p \geq 1} (-1)^p A_p \left[\delta(t) + U(t) e^t \frac{d^p}{dt^p} \left(\frac{e^{-2t} (t)^{p-1}}{(p-1)!} \right) \right] \end{cases}$$

T est à support positif d'où $T \in \mathcal{S}'^+$.

Remarque.

$L(s)$ fonction holomorphe de s pour $Re s \geq 0$ est transformée de **Laplace** d'une distribution T' à support positif telle que

$$\begin{cases} T' = D^2 g & (\text{dérivée au sens des distributions de la fonction } g). \\ (\mathcal{L}g) & \text{a une abscisse d'absolue convergence négative ou nulle.} \end{cases}$$

On a donc

$$\mathcal{F}(e^{-\xi t} T') = L(\xi + j\omega), \text{ quelque soit } \xi > 0.$$

Puisque

$$L(j\omega) = V(\omega), \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} e^{-\xi t} T' = \mathcal{F}V \text{ dans } \mathcal{S}'$$

d'où

$$T' = \mathcal{F}V = T$$

Par conséquent :

$$(\mathcal{L}T)(s) = L(s).$$

1,1.4. Proposition.

| La distribution tempérée $T = \mathcal{F} V$, est un convolveur de $\mathcal{S}'$: $T \in \mathcal{G}'_c$.

La fonction $L(s)$, holomorphe en tout point du demi plan $\text{Re } s \geq 0$, est indéfiniment dérivable, sa dérivée est une fonction de $\mathcal{Q}^+$, qui s'écrit à l'ordre h par exemple

$$L^{(h)}(s) = \sum_p c_{p,h} \left(\frac{1-s}{1+s} \right)^p \quad \text{avec} \quad \sum_p |c_{p,h}| < \infty.$$

En particulier $V(\omega) = (\mathcal{F} T)(\omega)$ (I,3), est indéfiniment dérivable et ses dérivées vérifient, à l'ordre h par exemple :

$$V^{(h)}(\omega) = \sum_p c_{p,h} \left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega} \right)^p \quad \left| V^{(h)}(\omega) \right| \leq \sum_p |c_{p,h}|.$$

Ces propriétés signifient que $V(\omega) \in \mathcal{G}_m$. Il résulte du théorème rappelé en I,1.2. que $T = (\mathcal{F} V)$ est un élément de $\mathcal{G}'_c$, ce qui traduit la proposition.

1,1.5. Définitions.

Nous appellerons $\mathcal{T}$ et $\mathcal{K}$, les espaces caractérisés de la manière suivante

$$(I,5) \quad \mathcal{T} = \left\{ T \in \mathcal{S}'^+, (\mathcal{L} T)(s) \in \mathcal{Q}^+ \right\}$$

$$(I,6) \quad \mathcal{K} = \left\{ V(\omega) \quad , \quad V(\omega) = (\mathcal{F} T)(\omega) \right\}.$$

Nous avons montré que $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}'_c$ et que ses éléments s'écrivent sous la forme

$$T = \sum_p A_p F_p \quad , \quad \sum_p |A_p| < \infty.$$

Les éléments de $\mathcal{K}$ homologue de $\mathcal{T}$ se développent alors en :

$$V(\omega) = \sum_p A_p f_p(\omega) \quad , \quad \sum_p |A_p| < \infty.$$

$\mathcal{T}$ et $\mathcal{K}$ sont deux espaces vectoriels de dimensions infinies.

1,2. Propriétés des espaces $\mathcal{T}$ et $\mathcal{K}$.

1,2.1. Fonctions conjuguées.

| La conjuguée $V^*(\omega)$ de toute fonction $V(\omega)$ de $\mathcal{K}$ vérifie la relation : $V^*(\omega) = V(-\omega)$.

La vérification de cette propriété est immédiate. En effet $V(\omega)$ s'écrit sous la forme

$$V(\omega) = \sum_p A_p f_p(\omega)$$

$$\text{d'où} \quad V^*(\omega) = \sum_p A_p f_p^*(\omega) = \sum_p A_p f_p(-\omega) \quad \text{et} \quad V^*(\omega) = V(-\omega).$$

Il en résulte que la partie réelle $\text{Re } V(\omega) = 1/2 [V(\omega) + V^*(\omega)]$ est une fonction paire de ω
la partie imaginaire $\text{Im } V(\omega) = 1/2 j [V(\omega) - V^*(\omega)]$ est une fonction impaire de ω .

1,2.2. Multiplication dans $\mathcal{K}$. Produit de convolution dans $\mathcal{T}$.

La multiplication dans $\mathcal{K}$, associe à deux éléments quelconques

$$V(\omega) = \sum_p A_p f_p(\omega) \quad , \quad V'(\omega) = \sum_q A'_q f_q(\omega)$$

$$\text{le produit} \quad V(\omega) V'(\omega) = \sum_p \sum_q A_p A'_q f_{p+q}(\omega) \quad V(\omega) V'(\omega) \in \mathcal{K}$$

$$\text{car} \quad \sum_p \sum_q |A_p A'_q| = \sum_p |A_p| \sum_q |A'_q| < \infty.$$

D'où la propriété :

| $\mathcal{K}$ est stable pour l'opération de multiplication.

On peut évidemment définir de même le produit de deux éléments de $\mathcal{Q}^+$.

Si l'on considère deux éléments T et T' de $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}'_c$ alors $\mathcal{F}(T * T') = (\mathcal{F} T) (\mathcal{F} T')$
 Il résulte de la propriété précédente que $\mathcal{F}(T * T') \in \mathcal{K}$ d'où $T * T' \in \mathcal{O}'_c$.
 $\mathcal{C}$ est stable pour l'opération produit de convolution.

1,2.3. Proposition.

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{H}$ des suites réelles sommables
 $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\mathcal{K}$ (respectivement $\mathcal{C}$).

A tout élément $V(\omega) \in \mathcal{K}$ on peut faire correspondre la suite $V = \{A_p\}_p$ de $\mathcal{H}$ et réciproquement. Il est trivial de vérifier que cette correspondance est un isomorphisme pour les structures d'espaces vectoriels et pour la multiplication.

Remarque.

$\mathcal{H} \subset \ell^1 \subset \ell^2$ espace des suites de carrés sommables. On sera amené dans la suite, à considérer sur $\mathcal{H}$, le produit scalaire $\langle V, V' \rangle = \sum_p A_p A'_p$. Il lui correspond la norme induite par celle de ℓ^2 .

1,2.4. Topologie sur $\mathcal{K}$.

Soit μ_e une mesure positive bornée. A tout couple $H(\omega), K(\omega)$ de fonctions de $\mathcal{K}$ on peut associer le produit scalaire

$$(H, K) = \int H(\omega) K^*(\omega) d\mu_e(\omega).$$

Il lui correspond la norme $\|H\| = \left(\int H(\omega) H^*(\omega) d\mu_e(\omega) \right)^{1/2}$.

La topologie définie par cette norme est la topologie induite par $\mathcal{L}^2(\mu_e) : \mathcal{K} \subset \mathcal{L}^2(\mu_e)$. Ces définitions impliquent que l'on identifie deux fonctions si elles sont égales presque partout par rapport à la mesure μ_e . On considère donc en fait, le quotient par la relation d'équivalence $(\underline{\underline{p}})$ de l'ensemble des fonctions de $\mathcal{K}$. Par abus de notation, on continuera à appeler $\mathcal{K}$ l'ensemble des classes d'équivalence et on ne distinguera pas les classes de leurs représentants, lorsque cette identification est sans influence sur les résultats démontrés.

Proposition :

Tout élément de $\mathcal{K}$ peut être approché uniformément en moyenne, par une fraction rationnelle, au sens de la métrique qui vient d'être définie.

Considérons $H(\omega) \in \mathcal{K}$ et posons :

$$H_N(\omega) = \sum_{p=0}^N A_p f_p(\omega),$$

$H_N(\omega)$ est une fraction rationnelle.

$$\|H - H_N\| = \left(\sum_{p,q > N} A_p A_q (f_p, f_q) \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{p > N} |A_p| \sum_{q > N} |A_q| \right)^{1/2} \left(\int d\mu_e(\omega) \right)^{1/2}.$$

En choisissant N tel que $\sum_p |A_p| \leq \varepsilon$ sur ℓ^1 on obtient :

$$\|H - H_N\| \leq \varepsilon \left(\int d\mu_e(\omega) \right)^{1/2}$$

ce qui traduit la proposition.

Conséquence.

Cette propriété exprime que la suite $\mathcal{B} = \{f_p(\omega)\}_p$ est complète. C'est une base de $\mathcal{K}$ pour la topologie considérée.

1,2.5. Notion de bases équivalentes.

Une base $\mathcal{B}$ étant donnée, on peut considérer l'ensemble des sous espaces vectoriels $\mathcal{E}_p$ de $\mathcal{K}$ engendrés par les systèmes de générateurs de rang croissant.

Deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont dites équivalentes si quel que soit le sous espace vectoriel $\mathcal{E}_{1,p}$ relatif à la première base, on peut trouver $\mathcal{E}_{2,q}$ tel que $\mathcal{E}_{2,q} \supset \mathcal{E}_{1,p}$; et réciproquement. Cette définition nous conduit à effectuer une comparaison sur $\mathcal{K}$ entre la base $\mathcal{B} = \{f_p(\omega)\}_p$ et l'ensemble des fonctions $\{\ell_n(\omega)\}_n$, telles que

$$\ell_0(\omega) = 1, \quad \ell_n(\omega) = \frac{(1-j\omega)^{n-1}}{(1+j\omega)^n}.$$

Ces dernières sont les transformées de **Fourier** des fonctions de **Laguerre** usuelles :

$$L_n(t) = e^{-t} u(t) \left[\sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} \frac{(2t)^{n-p}}{(n-p)!} \right]$$

et correspondent biunivoquement aux $f_p(\omega)$ par les formules

$$(I,7) \quad \begin{cases} \left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega} \right)^n = (-1)^n + 2 \sum_{p=1}^n (-1)^{n+p} \frac{(1-j\omega)^{p-1}}{(1+j\omega)^p} \\ \frac{(1-j\omega)^{n-1}}{(1+j\omega)^n} = 1/2 \left[\left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega} \right)^n + \left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega} \right)^{n-1} \right] \end{cases}$$

Toute fonction $K(\omega) \in \mathcal{K}$ s'écrit $K(\omega) = \sum_p A_p f_p(\omega)$ ou encore $K(\omega) = \sum_n C_n \ell_n(\omega)$

avec :

$$\begin{cases} C_0 = \sum_p (-1)^p A_p \\ C_n = 2 \sum_{p \geq n} (-1)^{n+p} A_p \end{cases} \iff \begin{cases} A_0 = C_0 + \frac{C_1}{2} \\ A_p = 1/2 (C_p + C_{p+1}) \end{cases}$$

la condition $\sum_p |A_p| < \infty$ équivaut à : $|C_0| < \infty$ et $\sum_n |C_n + C_{n+1}| < \infty$.

De la relation :

$$K(\omega) - \sum_0^{N+1} C_n \ell_n(\omega) = \sum_{p \geq N} (-1)^{N+p} A_p f_N(\omega) + \sum_{p \geq N} A_p f_p(\omega)$$

on déduit facilement que $\{\ell_n(\omega)\}$ est une suite complète de $\mathcal{K}$. D'après les relations (I,7) les deux bases $\{f_p(\omega)\}$ et $\{\ell_n(\omega)\}$ sont équivalentes.

Proposition.

L'ensemble des fonctions $\ell_n(\omega)$ forme sur $\mathcal{K}$ une base équivalente à $\mathcal{B}$. Tout élément $K(\omega) \in \mathcal{K}$ s'écrit encore :

$$K(\omega) = \sum_n C_n \ell_n(\omega) \quad \text{avec :} \quad |C_0| < \infty, \quad \sum_n |C_n + C_{n+1}| < \infty.$$

Remarque.

Les fonctions de **Laguerre** $L_n(t)$ forment une base orthonormale de l'espace $\mathcal{L}^2$ des fonctions réelles de t , nulles pour $t < 0$, de carré sommable par rapport à la mesure de **Lebesgue**.

Alors :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ell_p(\omega) \ell_q^*(\omega) d\omega = \delta_{p,q}$$

où $\delta_{p,q}$ désigne le symbole de **Kronecker**. Lorsque $\{C_n\}$ est une suite de $\mathcal{H}$, la fonction

$$H(\omega) = C_0 + \sum_{n \geq 1} C_n \ell_n(\omega)$$

est un élément de $\mathcal{K}$ et l'on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega) - C_0|^2 d\omega = \sum_{n \geq 1} C_n^2 < \infty \implies \left[(\mathcal{F} H)(t) - C_0 \delta(t) \right] \in \mathcal{L}^2$$

d'où la propriété :

On trouve dans $\mathcal{K}$ des fonctions qui, aux singularités près (mesures de Dirac) sont des fonctions de $\mathcal{L}^2$.

1.3. Systèmes linéaires physiquement réalisables.

Un système linéaire peut être caractérisé par un opérateur linéaire transformant une grandeur $e(t)$ dépendant du temps, dite entrée ou excitation, en une grandeur $s(t)$ appelée sortie ou réponse. Si $e(t)$ et $s(t)$ sont scalaires le système considéré initialement est du premier ordre.

1.3.1. Rappel : notion de réponse impulsionnelle d'un système linéaire.

Définition : On appelle réponse impulsionnelle μ_t^τ d'un système linéaire; la distribution qui à l'instant t représente la réponse due à l'application au temps τ d'une excitation égale à l'impulsion unité.

Propriété : La réponse impulsionnelle caractérise entièrement le système lorsque l'hypothèse de continuité suivante [20] est réalisée :

« Si des excitations e_p convergent vers e pour $p \rightarrow \infty$ (au sens de la convergence des distributions), les réponses correspondantes s_p convergent vers la réponse s relative à e ».

Lorsque $e(t)$ est une entrée admissible la réponse à l'instant t est définie et est généralement égale à l'intégrale de e par rapport à la distribution μ_t . Elle s'écrit alors sous la forme :

$$(I,8) \quad s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \mu_t^\tau, \quad \text{où } \tau \text{ représente la variable d'intégration.}$$

1.3.2. Système linéaire physiquement réalisable.

La notion de système « physiquement réalisable » est caractérisée dans la pratique par un ensemble de propriétés qualitatives que l'on peut classer de la manière suivante :

propriété de causalité et de réalité : traduit que le système évidemment réel, ne répond pas avant d'être excité ($\tau \leq t$) -

propriété de stabilité : le système doit vérifier un critère de stabilité que nous serons amenés à définir par la suite -

représentation : le système admet une réalisation sous forme de filtres analogiques, sous des conditions que nous serons également amenés à préciser -

Définition

Nous dirons qu'un système linéaire est physiquement réalisable, si sa réponse impulsionnelle est un élément de $\mathcal{D}$.

Il est évident, moyennant certaines hypothèses sur les entrées admissibles, que les propriétés de continuité, de causalité, de réalité se trouvent immédiatement vérifiées.

1.3.3. Systèmes linéaires stationnaires.

Un système linéaire est dit stationnaire, lorsque sa réponse impulsionnelle est invariante par toute translation dans le temps.

μ_t^τ , que nous noterons μ , ne dépend alors que de l'intervalle $(t - \tau) = \nu$. Il est couramment démontré (par exemple [5] chap. V) que la réponse du système est égale au produit de convolution

$$(I,9) \quad s(t) = (\mu * e)(t)$$

pour l'ensemble des entrées telles que (I,9) ait un sens. On peut en effet effectuer dans l'expression (I,8) lorsqu'elle existe, le changement de variable $(t - \tau) = \nu$. La réponse à l'instant t est donnée par

$$s(t) = \int_0^\infty e(t - \nu) \mu^\nu$$

qui est une forme de $(\mu * e)(t)$.

Systèmes stationnaires physiquement réalisables.

Dans l'étude des systèmes linéaires stationnaires on est souvent amené à introduire les notions de fonction de transfert et de réponse harmonique - sous réserve d'existence on appelle *réponse harmonique* du système : la

transformée de **Fourier** $(\mathcal{F}\mu)(\omega)$ de la réponse impulsionnelle μ ; *fonction de transfert* : la transformée de **Laplace** $(\mathcal{L}\mu)(s)$ de la réponse impulsionnelle.

Lorsque μ est un élément de $\mathcal{D}$, ces fonctions existent toujours et vérifient les propriétés suivantes :
 $(\mathcal{F}\mu)(\omega) \in \mathcal{K}$. La propriété d'holomorphic (I,1.1.) entraîne que $(\mathcal{F}\mu)$ est une fonction continue de ω .
 $(\mathcal{L}\mu)(s) \in \mathcal{Q}^+$ et satisfait à la relation $(\mathcal{L}\mu)(j\omega) = (\mathcal{F}\mu)(\omega)$.

Un système physiquement réalisable peut être ainsi caractérisé à l'aide des notions de réponse harmonique et de fonction de transfert.

I,4. Systèmes stationnaires à entrées aléatoires.

Parmi les entrées des systèmes physiques stationnaires, certaines sont des fonctions ou des distributions connues d'autres des processus aléatoires. Nous envisagerons ce dernier cas, et nous appliquerons à l'étude un ensemble de propriétés démontrées dans ([14] chap. VII).

I,4.1. Rappel des caractéristiques de l'entrée.

Nous supposons que l'excitation e du système est un processus aléatoire scalaire, centré, continue stationnaire du second ordre, défini à partir des notions suivantes :

Soit $\mathcal{P}$, l'espace des variables aléatoires scalaires y sur un espace probabilisé, telles que $(E |y|^2) < \infty$ où E représente la moyenne stochastique. Un processus aléatoire est constitué par une application $e: t \rightarrow e(t)$ associant à tout instant t une variable aléatoire réelle $e(t)$.

Il est dit centré stationnaire du second ordre si

$$\left\{ \begin{array}{l} e(t) \in \mathcal{P} \\ E [e(t)] = 0 \quad \forall t \\ E [e(t_1 - \theta) e(t_2 - \theta)] = E [e(t_1) e(t_2)] \quad \forall t_1, t_2, \theta \end{array} \right.$$

Il est caractérisé du point de vue statistique par la fonction d'autocorrélation $Re(u)$ telle que

$$Re(u) = E [e(t) e(t+u)]$$

la mesure spectrale ϕ_e appelée répartition spectrale de puissance telle que $\overline{\mathcal{F}}(\phi_e) = Re(u)$
 ϕ_e est une mesure positive bornée -
la variance

$$\sigma_e^2 = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi_e(\omega) = Re(0) < \infty .$$

I,4.2. Réponse du système.

La réponse $S(t)$ du système, égale au produit de convolution (I,9).

$$S(t) = (\mu * e)(t)$$

est définie sous réserve que $(\mathcal{F}\mu)(\omega) \in \mathcal{L}^2(\phi_e)$ cette condition est vérifiée quel que soit $\mu \in \mathcal{D}$ car nous avons : $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}^2(\mu_e)$ où μ_e est une mesure positive bornée quelconque, ϕ_e par exemple. Alors $S(t)$ est un processus aléatoire stationnaire

$$(I,10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{de mesure spectrale} & \phi_s = |\mathcal{F}\mu|^2 \phi_e \\ \text{de variance} & \sigma_s^2 = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi_s < \infty \end{array} \right.$$

Ces expressions ont effectivement un sens. En effet pour que ϕ_s soit une mesure positive bornée il suffit que $|\mathcal{F}\mu|^2$ soit intégrable $|\mathcal{F}\mu|^2 \in \mathcal{L}^1(\phi_e)$. Cette condition est toujours réalisée lorsque $\mu \in \mathcal{D}$.

I,4.3. Propriétés.

Il est possible de revenir maintenant sur l'ensemble des propriétés (I,3.2).

a) **stabilité** - Nous dirons qu'un système linéaire est stable si la variance de sa réponse à toute excitation

aléatoire $e(t)$ définie en (I,4.1) existe $\Leftrightarrow E (s(t)^2) < \infty$. Pour tout $\mu \in \mathcal{T}$, $(\mathcal{F}\mu)(\omega) \in \mathcal{L}^2(\phi_e)$; d'où la *proposition*.

tout élément μ de $\mathcal{T}$, engendre un système linéaire stable.

b) représentation des systèmes - Tout élément μ de $\mathcal{T}$ caractérise un système représentable sur réseau analogique.

En effet, $e(t)$ désignant l'entrée aléatoire, l'ensemble des éléments $G_p(t) = (\mathcal{F}_p * e)(t)$ vérifie le système d'équations différentielles récurrentes :

$$(I,11) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_0(t) = (\delta * e)(t) \\ g_1 + \dot{g}_1 = g_0 \\ \vdots \\ g_p + \dot{g}_p = g_{p-1} - \dot{g}_{p-1} \\ \vdots \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} G_0 = g_0 \\ G_1 = g_1 - \dot{g}_1 \\ \\ G_p = g_p - \dot{g}_p \end{array}$$

réalisables avec des amplificateurs opérationnels récurrents. Il sera dès lors possible de représenter analogiquement (au moins jusqu'à un rang fini) toute série $\sum_p A_p G_p(t)$, $\sum_p |A_p| < \infty$.

c) remarque - Connaissant $\phi_s = |\mathcal{F}\mu|^2 \phi_e$ et $\phi_{e,s} = (\mathcal{F}\mu) \cdot \phi_e$ il est possible d'approcher, au sens des moindres carrés, $(\mathcal{F}\mu)(\omega)$ par un développement (I,3) de rang fini. Cette méthode permet de représenter tout système physique quelconque, par un modèle rationnel [37].

1,4.4. Conséquences topologie associée à $e(t)$.

A une entrée aléatoire donnée $e(t)$, correspond sur $\mathcal{X}$, la topologie « associée à $e(t)$ », et définie par le produit scalaire

$$(H, K)_e = \int H(\omega) K^*(\omega) d\phi_e(\omega).$$

La variance de la réponse (I,9), est égale à $2\pi \sigma_s^2 = \|\mathcal{F}\mu\|_e^2$

Posons $(\mathcal{F}\mu)(\omega) = H(\omega)$ et $H_N(\omega) = \sum_0^N A_p f_p(\omega)$.

Puisque $|\|H\|_e - \|H_N\|_e| \leq \|H - H_N\|_e$

il est possible d'approximer la variance σ_s^2 de la réponse en approchant $H(\omega)$ par des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\mathcal{B}$ (I,2,4).

Cette remarque est importante pour les problèmes de contrôle qui comportent l'étude de variances telles σ_s^2 . Elle montre l'intérêt des transformées de **Fourier** rationnelles.

1,5. Généralisation : systèmes d'ordre quelconque.

Pour généraliser aux systèmes d'ordre quelconque les propriétés des systèmes du premier ordre, nous nous limiterons à l'étude des systèmes linéaires stationnaires et nous nous bornerons à reprendre quelques unes des notions fondamentales précédentes. Lorsque l'entrée est un vecteur $X(t)$ de $\mathcal{R}^n$ soit :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_j(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

et la sortie un vecteur $S(t)$ de $\mathcal{R}^p$:

$$S(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_i(t) \\ \vdots \\ s_p(t) \end{bmatrix}$$

le système est dit à n entrées, p sorties.

1,5.1. Matrice impulsionnelle.

Nous appellerons matrice impulsionnelle m du système, le tableau des μ_{ij}

où
$$\begin{cases} i = 1 \dots p & \text{indice de ligne} \\ j = 1 \dots n & \text{indice de colonne} \end{cases}$$

chaque μ_{ij}^T , est la réponse relative à la sortie $s_i(t)$ due à l'application au temps τ , d'une excitation $x(\tau)$ telle que
$$x_k(\tau) = 0 \quad k \neq j, \quad x_k(\tau) = \delta(\tau) \quad k = j.$$

Puisque nous considérons les systèmes physiquement réalisables, chaque μ_{ij} est un élément de $\mathcal{C}^\infty$.

Tenant compte de la linéarité et de l'hypothèse de stationnarité il vient :

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^n s_{i,j}(t) \quad \text{et} \quad s_{i,j}(t) = (\mu_{ij} * x_j)(t).$$

Nous écrirons globalement la réponse :

$$(I,12) \quad S(t) = (M * X)(t).$$

1.5.2. Propriétés statistiques de l'entrée.

Nous étudierons le cas où l'entrée est à chaque instant une variable aléatoire vectorielle telle que le processus $t \rightarrow X(t)$ soit stationnaire centré du second ordre, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_i(t) \in \mathcal{P} & \forall t \in \mathcal{R} & i = 1 \dots n \\ E(X(t)) = 0 & \text{indépendant de } t \\ E[x_i(t_1 - \theta) x_j(t_2 - \theta)] = E[x_i(t_1) x_j(t_2)] & (\forall i, j, \theta, t_1, t_2). \end{cases}$$

Ce processus est caractérisé par ses :

matrice de corrélation $Q_x = E[X(t) X(t+u)^T]$
dont les termes sont les fonctions d'intercorrélation $R_{x_i, x_j}(u)$ $\forall i, j$
matrice spectrale (Φ_x) dont les termes sont les mesures spectrales Φ_{x_i, x_j} telles que

$$R_{x_i, x_j}(u) = (\mathcal{F} \Phi_{x_i, x_j})(u).$$

1.5.3. Propriétés statistiques de la réponse.

On déduit des résultats établis dans [14] que la réponse est un processus aléatoire stationnaire du second ordre. La propriété vraie pour un processus

$$t \longrightarrow \begin{bmatrix} (\mu * \gamma)(t) \\ X(t) \end{bmatrix}$$

s'étend à un processus formé à partir du précédent, par des combinaisons linéaires finies

$$t \longrightarrow \begin{bmatrix} s_i(t) = \sum_{j=1}^n (\mu_{ij} * x_j)(t) \end{bmatrix} \quad i = 1 \dots p.$$

La réponse sera caractérisée par sa matrice de corrélation $Q_s = E[S(t) S(t+u)^T]$
et sa matrice spectrale (Φ_s) dont on désignera les termes par Φ_{s_i, s_k} .

Relation fondamentale.

Calculant les fonctions d'intercorrélation il vient

$$\forall i, k \quad R_{s_i, s_k}(u) = E \left[\left(\sum_j \mu_{ij} * x_j \right)(t) \left(\sum_h \mu_{kh} * x_h \right)(t+u) \right]$$

A cause de la multilinéarité

$$R_{s_i, s_k}(u) = \sum_j \sum_h \widetilde{\mu}_{ij} * R_{x_j, x_h}(u) = \sum_j \sum_h \widetilde{\mu}_{ij} * \left(\sum_h \mu_{kh} * R_{x_j, x_h}(u) \right)$$

$\mu_{ij} \rightarrow \widetilde{\mu}_{ij}$ est une involution définie dans $\mathcal{C}^\infty$. Les relations établies dans le cas d'une convolution, se généralisent facilement. Si l'on remarque que la propriété (I,2.1) entraîne

$$2\pi \left[(\mathcal{F} \widetilde{\mu}_{ij})(\omega) \right] = \left[(\mathcal{F} \mu_{ij})(\omega) \right]^*$$

il vient :

$$\Phi_{s_i, s_k} = 2\pi \sum_{(j,h)=1}^n \widetilde{\mathcal{F} \mu_{ij}} \mathcal{F} \mu_{kh} \Phi_{x_j, x_h}.$$

Cette relation conduit à la relation matricielle fondamentale

$$(I,13) \quad (\phi_s) = 2\pi \bar{\mathcal{F}}(m) \cdot (\phi_e) \cdot \mathcal{F}(m^T)$$

dans laquelle $\bar{\mathcal{F}}(m)$ est la matrice de termes $\bar{\mathcal{F}}(\mu_{ij})$, $\mathcal{F}(m^T)$ la transposée de la matrice de termes $\mathcal{F}(\mu_{ij})$.

Remarque - Notion de stabilité.

Si l'on généralise la notion de stabilité donnée en (I,4.3.) nous dirons que un système à sorties multiples est stable si

$$E \left[s_i(t) s_j(t) \right] < \infty \quad \forall i, j.$$

Cette condition est réalisée dès que $\mu_{ij} \in \mathcal{V}$. La définition des systèmes linéaires représentables, d'ordre quelconque est compatible avec la notion de stabilité.



Chapitre II

PROBLÈME D'OPTIMISATION - ÉTUDE GÉNÉRALE

On se propose de réaliser le contrôle de la réponse d'un système linéaire commandé excité par un processus aléatoire. Ce problème d'optimisation suscitera des applications importantes dans l'étude du pilotage d'un avion en turbulence.

La variable d'état est définie en fonction de la commande et de l'excitation par une équation de convolution. Les conditions imposées au problème se traduisent dans la recherche d'une commande linéaire active entraînant la minimisation de la variance de la réponse.

L'étude est développée d'une manière générale sur l'espace $\mathcal{T}$ et sur son homologue $\mathcal{X}$, espaces de dimensions infinies. On montrera l'existence de suites minimisantes et on établira, pour le minimum, un théorème d'unicité fondamental dans l'approximation de la loi optimale et dans le traitement numérique de la résolution.

II. PROBLÈME D'OPTIMISATION - ÉTUDE GÉNÉRALE

II,1. Problème.

II,1.1. Considérons un système linéaire stationnaire à deux entrées $e(t), u(t)$ une sortie $s(t)$ dans lequel $u(t)$ est une commande et $e(t)$ un processus aléatoire scalaire stationnaire du second ordre caractérisé par la mesure spectrale ϕ_e . Nous supposerons que le support de $\mathcal{F}_e$, n'est pas ponctuel.

Le système est défini par l'équation de convolution

$$(II,1) \quad s(t) = (\mu * e)(t) + (\nu * u)(t)$$

dans laquelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} e(t) \text{ représente l'excitation aléatoire,} \\ u(t) \text{ la commande,} \\ s(t) \text{ la variable d'état,} \\ \mu \text{ et } \nu \text{ éléments de } \mathcal{T} \text{ sont les réponses impulsionnelles} \\ \text{relatives aux entrées } e \text{ et } u. \end{array} \right.$$

Dans le but d'améliorer le comportement de la réponse $s(t)$ on se propose de définir une commande linéaire « physiquement réalisable » satisfaisant à un ensemble de conditions selon lesquelles :

- 1 - Les réponses impulsionnelles μ et ν ne sont pas modifiées par le contrôle de $s(t)$.
- 2 - Le système commandé est stable.
- 3 - La réponse du système commandé est un processus aléatoire de variance minimale.

Les nécessités de la prévision imposent une loi linéaire :

$$(II,2) \quad u(t) = (\eta * e)(t)$$

dans laquelle l'inconnue est la distribution η de $\mathcal{T}$.

La réponse du système commandé s'écrit sans modification des réponses impulsionnelles précédentes :

$$s(t) = [(\mu + \nu * \eta) * e](t)$$

et définit un processus aléatoire stationnaire de mesure spectrale

$$\phi_s = \left| \mathcal{F}(\mu + \nu * \eta) \right|^2 \phi_e.$$

Désignant par $A(s), B(s), K(s)$ les fonctions de transfert respectives de μ, ν, η il vient :

$$\dot{\phi}_s = \left| A(j\omega) + B(j\omega) K(j\omega) \right|^2 \dot{\phi}_e .$$

Les fonctions $A(j\omega), B(j\omega)$ sont par hypothèse des éléments de $\mathcal{K}$. Dès que $K(j\omega) \in \mathcal{K}$, $B(j\omega) K(j\omega)$ est un élément de $\mathcal{K}$ et la condition 2 :

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{\phi}_s < \infty .$$

est réalisée.

Si l'on revient sur $\mathcal{K}$, au produit scalaire relatif à la mesure positive bornée $\dot{\phi}_e$

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} fg * d\dot{\phi}_e$$

la variance de $S(t)$ s'écrit

$$\sigma_s^2 = \frac{J(K)}{2\pi}$$

J est une fonctionnelle définie sur $\mathcal{K}$ à valeurs

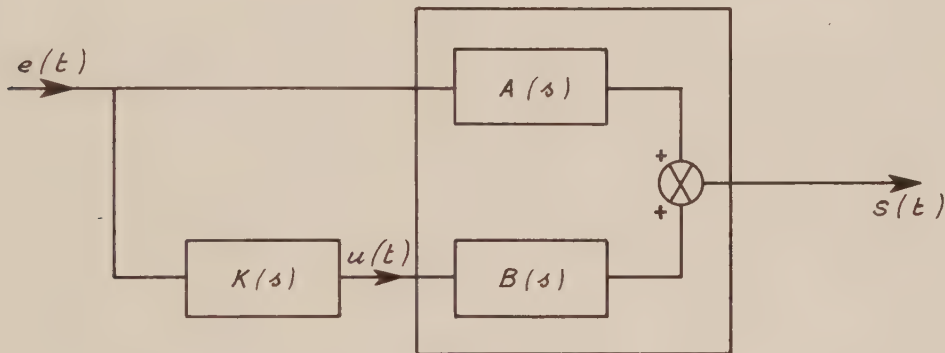
$$(II,3) \quad \begin{aligned} J(K) &= J(0) + (A, BK) + (BK, A) + (BK, BK) \\ J(0) &= (A, A) . \end{aligned}$$

Par définition $J(K) \geq 0$, $\forall K(j\omega) \in \mathcal{K}$. Nous chercherons à déterminer $\eta \in \mathcal{C}$, ou ce qui est équivalent $K(j\omega) \in \mathcal{K}$, de manière à minimiser $J(K)$ (II,3).

En résumé : le problème posé est défini par les équations

$$\begin{cases} \text{état} & S(t) = (\mu * e)(t) + (\nu * u)(t) \\ \text{commande} & u(t) = (\eta * e)(t) \\ \text{contrainte} & \eta \in \mathcal{C} . \end{cases}$$

Elles correspondent au diagramme suivant



le problème consiste à minimiser $J(K)$ sur $\mathcal{K}$.

Remarque

Une solution évidente est donnée par

$$(II,4) \quad K(j\omega) = - \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} .$$

Cette solution triviale est indépendante de l'excitation et conduit à l'annulation de la variance. Elle n'est admissible que si elle définit un élément de $\mathcal{K}$.

II,1.2. Théorème.

La fonctionnelle J définie par (II,3) est une fonctionnelle convexe.

Soient $K_1(j\omega)$ et $K_2(j\omega)$, deux fonctions de $\mathcal{K}$ et α un scalaire quelconque. Si l'on choisit

$$K(j\omega) = \alpha K_1(j\omega) + (1-\alpha) K_2(j\omega) ,$$

l'expression (II,3) devient un trinôme en α de la forme :

$$J[\alpha] = \alpha J[1] + (1-\alpha) J[0] - \alpha (1-\alpha) Q$$

$$J[\alpha] = J(K)$$

$$J[1] = J(K_1) \quad J[0] = J(K_2)$$

$$Q = (B(K_2 - K_1), B(K_2 - K_1)) .$$

Par définition Q est défini positif, $Q \geq 0$. Deux cas sont à considérer :

ou bien $Q > 0$: quel que soit $\alpha \in [0, 1]$ il vient :

$$J[\alpha] \leq \alpha J[1] + (1-\alpha) J[0]$$

ou bien $Q = 0$. Cette condition se traduit par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |B|^2 |K_2 - K_1|^2 d\phi_e = 0$$

et entraîne que $B(K_2 - K_1) = 0$ presque partout par rapport à la mesure ϕ_e . Il en résulte que $(A, BK_2) = (A, BK_1)$ et par suite $J[0] = J[1]$ quel que soit α : $J[\alpha] = J[0]$.

Dans chacun des cas, la relation de convexité

$$(II,5) \quad J[\alpha] \leq \alpha J[1] + (1-\alpha) J[0]$$

est vérifiée, d'où le théorème.

Corollaire.

L'ensemble $\mathcal{K}_0$ des fonctions de $\mathcal{K}$, pour lesquelles $J(K) \leq J(0)$ est un ensemble convexe.

Vérifions d'abord que $\mathcal{K}_0$ est non vide. Il suffit de remarquer, par exemple que à

$$K_0(j\omega) = - \frac{(A, B) + (B, A)}{2(B, B)}$$

correspond $J(K_0) = J(0) - \frac{[(A, B) + (B, A)]^2}{4(B, B)} \leq J(0)$ d'où : $K_0(j\omega) \in \mathcal{K}_0$.

Si $K_1(j\omega)$ et $K_2(j\omega) \in \mathcal{K}_0$ et si $K(j\omega)$ est de la forme $K(j\omega) = \alpha K_1(j\omega) + (1-\alpha) K_2(j\omega)$, alors d'après le théorème précédent il vient :

$$\forall \alpha \in [0, 1], J(K) \leq \alpha J(K_1) + (1-\alpha) J(K_2)$$

d'où $J(K) \leq J(0)$; $K(j\omega) \in \mathcal{K}_0$, ce qui démontre la propriété.

Conséquence.

L'ensemble des valeurs $J(K)$, forme sur $\mathcal{R}$, un sous-ensemble minoré. Soit m sa borne inférieure

$$m = \lim_{K \in \mathcal{K}} J(K)$$

Supposons que m soit atteinte sur $\mathcal{K}$. Cette hypothèse entraîne la propriété suivante :

S'il existe $K_1(j\omega) \in \mathcal{K}$, tel que $J(K_1) = m$ alors $K_1(j\omega)$ est unique à un ensemble de mesure nulle près par rapport à la mesure $|B(j\omega)|^2 \phi_e = \phi_b$.

Si $K_2(j\omega) \in \mathcal{K}$ est tel que $m = J(K_2) = J(K_1)$, il vient :

$$J(\alpha K_1 + (1-\alpha) K_2) = J(K_1) - \alpha(1-\alpha) Q, \quad Q \geq 0.$$

En supposant $Q \neq 0$, on pourrait déterminer $K'(j\omega)$, par exemple $K'(j\omega) = \frac{1}{2} (K_1(j\omega) + K_2(j\omega))$ de manière que $J(K') < J(K_1)$. Ce résultat est contraire à la définition de m . D'où $Q = 0$ et $K_1(j\omega) = K_2(j\omega)$ presque partout par rapport à la mesure positive bornée $\phi_b = |B(j\omega)|^2 \phi_e$.

II.2. Résolution dans $\mathcal{K}$.

Si l'on se réfère aux propriétés de l'espace normé $\mathcal{K}$, une méthode de résolution du problème (II,1) consiste à rechercher une solution de la forme

$$(II,6) \quad K(j\omega) = \sum_p k_p f_p(\omega),$$

telle que $K(j\omega) \in \mathcal{K}$. Cette solution est associée à la base $\mathcal{B} = \{f_p(\omega)\}$ que l'on a déterminée dans le chapitre I.

Désignons par $V = \{k_p\}$ la suite réelle de terme général k_p , et considérons l'espace $\mathcal{H}$ des suites sommables, isomorphe à $\mathcal{K}$. La contrainte se traduit par l'une ou l'autre des conditions :

$$K(j\omega) \in \mathcal{K} \iff V \in \mathcal{H}.$$

Nous verrons que cette équivalence permet de résoudre le problème de minimisation dans $\mathcal{H}$.

Si l'on tient compte de (II,6), l'expression développée de (II,3) s'écrit :

$$(II,7) \quad J(K) = J(0) + 2 \sum_p k_p \int_{-\infty}^{+\infty} R_e [A^* B f_p] d\phi_e + \sum_p \sum_q k_p k_q \int_{-\infty}^{+\infty} |B|^2 f_p f_q^* d\phi_e.$$

Elle a un sens pour tout $V \in \mathcal{H}$.

Pour le vérifier, il suffit de remarquer que

$$\left| 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_e [A^* B f_p] d\phi_e \right| \leq 2E \|A^* B\|_e \quad E = \left(\int d\phi_e \right)^{1/2}$$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} |B|^2 f_p f_q^* d\phi_e \right| \leq \|B\|_e^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} |J| &\leq |J(0)| + 2E \|A^* B\|_e \sum_p |k_p| + \|B\|_e^2 \left(\sum_p |k_p| \right)^2 \\ |J| &< \infty, \quad \forall V \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

II,2.1. Solutions de rang fini.

Nous allons commencer par résoudre des problèmes approchés, en cherchant des solutions de rang fini N

$$K_N(j\omega) = \sum_{p=0}^{N-1} k_p f_p(\omega).$$

Au sous-espace $\mathcal{K}_N$ de $\mathcal{K}$ engendré par l'ensemble $f_p(\omega)$, $p=0 \dots N-1$ correspond dans $\mathcal{H}$ le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_N$ de dimension N .

$$K_N(j\omega) \in \mathcal{K}_N, \quad K_N(j\omega) = \sum_{p=0}^{N-1} k_p f_p(\omega) \iff V_N \in \mathcal{H}_N, \quad V_N = \{k_p\}_{p=0 \dots N-1}$$

Considérons alors $F_N = \{k'_p\}_{p=0 \dots N-1}$, $k'_p = \int_{-\infty}^{+\infty} R_e [A^* B f_p] d\phi_e$

F_N est une suite de $\mathcal{H}_N$: $\sum_p |k'_p| \leq NE \|A^* B\|_e.$

Désignons par C_N l'opérateur linéaire symétrique opérant dans l'espace des suites et tel que

$$C_N: V_N \in \mathcal{H}_N \longrightarrow C_N V_N = \{h_p\}_{p=0 \dots N-1}$$

$$h_p = 1/2 \sum_{q=0}^{N-1} k_q \int_{-\infty}^{+\infty} |B|^2 (f_p f_q^* + f_q f_p^*) d\phi_e$$

C_N définit un endomorphisme de $\mathcal{H}_N$:

$$\sum_p |h_p| \leq N \|B\|_e^2 \sum_{q=0}^{N-1} |k_q|, \quad \sum_p |h_p| < \infty$$

C_N et F_N sont associés à la base $\mathcal{B}$ de départ.

Revenant au produit scalaire défini sur $\mathcal{H}$ par $\langle V, V' \rangle = \sum_p v_p v'_p$ nous écrirons

$$(II,8) \quad J_N(V_N) = J(0) + 2 \langle F_N, V_N \rangle + \langle C_N V_N, V_N \rangle$$

$J_N(V_N)$ vérifie la propriété suivante $J(K_N) = J_N(V_N)$. Le problème posé revient donc à déterminer $V_N \in \mathcal{H}_N$ tel que (II,8) soit minimal.

Théorème.

Dans $\mathcal{H}_N$, le problème de minimum a toujours une solution et une seule.

La forme quadratique $\langle C_N V_N, V_N \rangle$ est définie positive. En effet $\langle C_N V_N, V_N \rangle = 0$ entraîne $K_N(j\omega) = 0$ presque partout par rapport à la mesure $|B|^2 \phi_e$. La suite $\{f_p(\omega)\}_{p=0 \dots N-1}$ est un système de générateurs linéairement indépendants de $\mathcal{K}_N$ et $B(j\omega)$ une fonction continue (I,3.3.). La propriété $K_N(j\omega) \stackrel{pp}{=} 0$ entraîne $V_N = 0$ si le support de ϕ_e n'est pas ponctuel, condition que nous avons supposée vérifiée en (II,1). C_N est un opérateur régulier et (II,8) peut s'écrire :

$$\mathcal{J}_N(V_N) = \mathcal{J}(0) - \langle C_N(V_N + C_N^{-1}F_N), V_N + C_N^{-1}F_N \rangle - \langle F_N, C_N^{-1}F_N \rangle.$$

La fonction convexe $\mathcal{J}_N(V_N)$ admet un minimum unique

$$(II,9) \quad \hat{V}_N = -C_N^{-1}F_N.$$

Il lui correspond :

- la valeur minimal de (II,8) soit

$$\hat{\mathcal{J}}_N = \mathcal{J}_N(\hat{V}_N) = \mathcal{J}(0) - \langle C_N \hat{V}_N, \hat{V}_N \rangle$$

- la solution optimale de rang N sur $\mathcal{K}_N$, soit $\hat{K}_N(j\omega)$ dont les coefficients sont les solutions du système d'équations linéaires résultant de (II,9)

$$\hat{\mathcal{J}}_N = \mathcal{J}(\hat{K}_N) = \mathcal{J}(0) - \|\hat{K}_N B\|_e^2.$$

II,2.2. Suites minimisantes dans $\mathcal{H}$.

Proposition.

la suite $\{\hat{V}_N\}$ des solutions optimales dont l'existence est assurée par le théorème (II,2.1) forme dans $\mathcal{H}$ une suite minimisante relative à l'expression $\mathcal{J}$ (II,3).

Par définition $\mathcal{J}_N(V_N) \geq \hat{\mathcal{J}}_N \quad \forall V_N$. Au rang $(N+1)$ en particulier $\mathcal{J}_{N+1}(\hat{V}_N) \geq \hat{\mathcal{J}}_{N+1}$.

Il est évident d'après (II,8) que $\mathcal{J}_{N+1}(\hat{V}_N) = \hat{\mathcal{J}}_N$. D'où

$$(II,10) \quad \hat{\mathcal{J}}_N \geq \hat{\mathcal{J}}_{N+1} \quad \forall N$$

ce que traduit la proposition.

Corollaire.

La suite des valeurs minimales de $\mathcal{J}$, associée à la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{K}$ est convergente.

A la suite $\{\hat{V}_N\}$ correspond la suite des valeurs $\{\hat{\mathcal{J}}_N\}$ de la fonctionnelle $\mathcal{J}$. Nous noterons cette suite $\{\hat{\mathcal{J}}_{\mathcal{B},N}\}$ pour rappeler qu'elle dépend de la base $\mathcal{B}$ choisie au départ sur $\mathcal{K}$.

$\{\hat{\mathcal{J}}_{\mathcal{B},N}\}$ est une suite bornée inférieurement par zéro et monotone décroissante d'après (II,10).

Elle converge sur $\mathcal{R}^+$ vers une limite unique $m_{\mathcal{B}}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mathcal{J}}_{\mathcal{B},N} = m_{\mathcal{B}}.$$

Il en résulte que la suite $\{\hat{K}_{\mathcal{B},N}(j\omega)\}$ des solutions optimales associées à la base $\mathcal{B}$ vérifie sur $\mathcal{K}$ la propriété :

$$\|B(j\omega) \hat{K}_{\mathcal{B},N}(j\omega)\|_e^2 = \mathcal{J}(0) - \hat{\mathcal{J}}_N, \quad \|B(j\omega) \hat{K}_{\mathcal{B},N}(j\omega)\|_e^2 \leq \mathcal{J}(0) - m_{\mathcal{B}}.$$

Si l'on désigne par ϕ_b la mesure positive bornée définie par la relation $\phi_b = |B(j\omega)|^2 \phi_e$ on obtient d'une manière évidente $\|\hat{K}_N B\|_e = \|\hat{K}_N\|_b$. La suite $\{\hat{K}_{\mathcal{B},N}(j\omega)\}$ vérifie la propriété :

$$\|\hat{K}_{\mathcal{B},N}(j\omega)\|_b \leq \mathcal{J}(0) - m_{\mathcal{B}}.$$

On peut extraire (théorème du choix) de cette suite, une sous suite convergeant faiblement dans $\mathcal{L}^2(\phi_b)$. Cette limite faible peut ne pas appartenir à $\mathcal{K}$. Il est toujours possible de résoudre des problèmes approchés et d'approximer $m_{\mathcal{B}}$ en choisissant $K(j\omega) = K_N(j\omega)$, fraction rationnelle de $\mathcal{K}$.

Propriété.

Considérons l'ensemble des sous espaces vectoriels topologiques $\mathcal{K}_N$, associés à la base $\mathcal{B}$. Chaque $\hat{\mathcal{J}}_{\mathcal{B},N}$ réalise le minimum de $\mathcal{J}$ dans un sous espace vectoriel $\mathcal{K}_N$ de $\mathcal{K}$. Définissons sur l'ensemble des sous espaces vectoriels de $\mathcal{K}$ la fonctionnelle

$$\hat{\mathcal{J}} : \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{K}_N) = \hat{\mathcal{J}}_{\mathcal{B},N}.$$

La relation (II,10) entraîne :

$$\mathcal{K}_p \subset \mathcal{K}_q \Rightarrow \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{K}_q) \leq \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{K}_p).$$

La propriété se généralise d'une manière évidente indépendamment de la notion de base :

Si deux sous espaces vectoriels topologiques de $\mathcal{X}$ vérifient $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}''$, alors $\hat{\mathcal{J}}(\mathcal{E}'') \leq \hat{\mathcal{J}}(\mathcal{E}')$.

II,3. Comparaison des suites minimisantes.

Nous venons d'établir un ensemble de propriétés de la suite $\{\hat{\mathcal{J}}_{\mathcal{B},n}\}$ associée à une base déterminée de $\mathcal{X}$. Nous allons montrer que la limite $m_{\mathcal{B}}$ de cette suite est indépendante de la base $\mathcal{B}$ considérée. Les suites associées à des bases différentes sont par conséquent comparables.

Nous commencerons par démontrer la proposition suivante :

II,3.1. Proposition.

Soient : $K(j\omega)$ un élément de $\mathcal{X}$.

$K_n(j\omega)$ le développement tronqué au rang n de $K(j\omega)$ sur la base $\mathcal{B}$.

$\mathcal{J}(K)$ peut être approximé de la manière suivante :

$$(II,11) \quad \forall \varepsilon, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow |\mathcal{J}(K) - \mathcal{J}(K_n)| \leq \varepsilon$$

Reprenant (II,3) nous pouvons écrire :

$$|\mathcal{J}(K) - \mathcal{J}(K_n)| \leq 2 \left| (A, B(K - K_n)) \right| + |(BK, BK) - (BK_n, BK_n)|.$$

En considérant les mesures ϕ_e et $\phi_b = |B(j\omega)|^2 \phi_e$ nous obtenons d'une manière évidente :

$$\begin{aligned} |(A, B(K - K_n))| &\leq \|A\|_e \|K - K_n\|_b \\ |(BK, BK) - (BK_n, BK_n)| &= |(B(K - K_n), BK_n) + (BK, B(K - K_n))| \\ |(BK, BK) - (BK_n, BK_n)| &\leq \|K - K_n\|_b (\|K_n\|_b + \|K\|_b). \end{aligned}$$

A cause du caractère complet (I,2.4.) de la suite $\mathcal{B}$, il vient :

$$\forall \varepsilon, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow \|K - K_n\|_b \leq \eta(\varepsilon)$$

$$\text{où } \eta(\varepsilon) = \inf \left\{ \frac{\varepsilon}{6 \|K\|_b} + \frac{\varepsilon}{2 \|A\|_e} \right\}.$$

$$\text{Alors } |\mathcal{J}(K) - \mathcal{J}(K_n)| \leq \varepsilon.$$

Conséquences.

Revenant aux notations du paragraphe (II,2.2.) relatives à la base $\mathcal{B}$, nous avons $m_{\mathcal{B}} \leq \mathcal{J}(K_n)$.

La proposition précédente entraîne :

$$(II,12) \quad m_{\mathcal{B}} \leq \mathcal{J}(K) + \varepsilon \quad \forall K \in \mathcal{X}.$$

II,3.2. Unicité de la limite.

• L'ensemble des valeurs $\mathcal{J}(K)$ de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ forme sur $\mathcal{R}$ un sous ensemble minoré car $\mathcal{J}(K) \geq 0$. La borne inférieure $m = \lim_{K \in \mathcal{X}} \mathcal{J}(K)$ est caractérisée par la propriété suivante :

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $K \in \mathcal{X}$ tel que $m \leq \mathcal{J}(K) < m + \varepsilon$. Il résulte de la définition de m que $m \leq m_{\mathcal{B}}$. Si l'on tient compte de (II,12) et de la propriété de m , il vient :

$$m \leq m_{\mathcal{B}} < m + 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Cette relation vérifiée quel que soit $\varepsilon > 0$ entraîne $m_{\mathcal{B}} = m$.

• Les propriétés analysées dans les paragraphes précédents (II,2.1. et la suite) peuvent être reprises relativement à toute suite $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{X}$, complète pour la topologie induite par $\mathcal{L}^2(\phi_b)$. Si $m_{\mathcal{B}'} = \lim_{N \rightarrow \infty} \{\hat{\mathcal{J}}_{\mathcal{B}',N}\}$

désigne le minimum associé à cette base $\mathcal{B}'$, il vient comme précédemment $m_{\mathcal{B}'} = m$; d'où l'unicité de la limite.

m est le minimum du problème.

Proposition.

la limite $m_{\mathcal{B}}$ de la suite $\{\hat{J}_{\mathcal{B},N}\}$, est indépendante de la base $\mathcal{B}$ considérée sur $\mathcal{X}$. Elle définit le minimum m du problème.

Conclusion.

Quelle que soit la base considérée sur $\mathcal{X}$, on est conduit au minimum du problème II,1. Ce minimum théorique m est accessible au moins par des fractions rationnelles de $\mathcal{X}$. Il convient de signaler l'intérêt de la méthode de résolution approchée, bien adaptée à un traitement numérique du problème et de remarquer, à cette fin, que le choix de la base reste important pour des raisons de convergence.



Chapitre III

RÉSOLUTION GÉNÉRALE - UNE FORME EXPLICITE DE LA SOLUTION

Dans le chapitre précédent la résolution sur $\mathcal{K}$ de problèmes approchés, nous a permis d'analyser le problème d'optimisation. Pour lever les difficultés que peut poser la convergence du procédé, nous allons maintenant effectuer une résolution globale en appliquant les méthodes classiques du calcul des variations.

Le début du chapitre est consacré à l'application de ces méthodes, dans le cas le plus général. Elles permettent de dégager un ensemble de propriétés de la loi optimale qui complète l'analyse faite dans II.

Pour déterminer une solution explicite de forme rationnelle nous sommes amenés à étudier ensuite des cas simples quant à l'expression des fonctions de transfert et des mesures spectrales. Ces schémas simplifiés s'avèrent être représentatifs de nombreux cas physiques. Nous verrons que la résolution dérive alors de la théorie du filtre de **Wiener** et, à cet effet, nous établirons un théorème légitimant les méthodes employées et nous étudierons les propriétés de la solution. Nous généraliserons la forme de cette solution au cas où la mesure spectrale intervenant dans le calcul est quelconque.

La fin du chapitre représente une synthèse des résultats obtenus en I et II. Elle permet d'élaborer une méthode générale de résolution qui soit satisfaisante.

- d'un point de vue numérique, car elle est mieux appropriée au problème;
- d'un point de vue technique, car la solution est une expression facile à représenter physiquement.

Cette loi optimale comprend un développement qui dépend intrinsèquement de la structure et un complément relatif à l'excitation, qui se développe sur la base causale définie en I.

III. RÉSOLUTION GÉNÉRALE - UNE FORME EXPLICITE DE LA SOLUTION

Nous nous proposons d'effectuer une résolution directe du problème, en appliquant les méthodes du calcul des variations. Dans ce but, nous ferons l'hypothèse suivante :

La mesure spectrale $\mathcal{F}_e$ admet, par rapport à la mesure de **Lebesgue**, une densité spectrale $\varphi_e(\omega)$. Rappelons que $\varphi_e(\omega)$ est une fonction de ω , réelle et positive.

A - ÉTUDE GÉNÉRALE

Dans l'hypothèse indiquée, nous commencerons par analyser un ensemble de propriétés du problème.

III,1. Position du problème.

III,1.1. Expression de la variance.

La densité spectrale du processus aléatoire $e(t)$ définie généralement par $\varphi_e(\omega) = (\mathcal{F} R_e)(\omega)$ est une fonction paire de ω , la variance est égale à :

$$\sigma_e^2 = R_e(0) = 1/\pi \int_0^\infty \varphi_e(\omega) d\omega .$$

Proposition.

La variance d'un processus aléatoire stationnaire de densité spectrale $\varphi_e(\omega)$ est égale à :

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \varphi_e\left(\frac{s}{j}\right) ds, \quad s \text{ désigne une variable complexe.}$$

La démonstration fait appel à la notion de transformée de **Laplace** bilatérale.

On désigne par transformée de **Laplace** bilatérale d'une mesure μ , la fonction $(L\mu)(s)$ de la variable complexe $s = \xi + j\omega$, définie pour $\xi \in]\xi_0, \xi_1[$ par l'intégrale

$$(L\mu)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} d\mu(t)$$

$(L\mu)(s)$ vérifie la propriété suivante $(L\mu)(\xi + j\omega) = \mathcal{F}\left[e^{-\xi t} \mu\right](\omega)$.

Si l'on considère en particulier le processus aléatoire précédent, il vient :

$$(LR_e)(\xi + j\omega) = \left(\mathcal{F}\left[e^{-\xi u} R_e(u)\right]\right)(\omega)$$

pour tout ξ tel que $(LR_e)(s)$ soit défini, (donc au moins pour $\xi=0$ où $(LR_e)(j\omega) = \varphi_e(\omega)$).

Alors

$$R_e(u) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{\xi u} (LR_e)(j\omega + \xi)\right]$$

$$R_e(u) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\xi-j\infty}^{\xi+j\infty} e^{su} (LR_e)(s) ds.$$

Pour $\xi=0$

$$R_e(u) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} e^{su} \varphi_e\left(\frac{s}{j}\right) ds$$

et

$$\sigma_e^2 = R_e(0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \varphi_e\left(\frac{s}{j}\right) ds.$$

III,1.2. Conséquences.

Il résulte des définitions de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{Q}^+$ qu'il existe entre ces espaces un isomorphisme pour les structures d'espaces vectoriels. Les produits se correspondent dans cette transformation.

$$f(\omega) \in \mathcal{K} \iff F(s) \in \mathcal{Q}^+ \quad \text{avec} \quad F(j\omega) = f(\omega).$$

Soit $\mathcal{Q}^-$ l'espace des fonctions holomorphes en tout point du demi plan complexe $\operatorname{Re} s \leq 0$. Il existe entre $\mathcal{Q}^+$ et $\mathcal{Q}^-$ une correspondance évidente :

$$F(s) \in \mathcal{Q}^+ \iff F(-s) \in \mathcal{Q}^-.$$

Il vient alors

$$F(-j\omega) = f(-\omega)$$

et d'après (I,2.1.)

$$F(-j\omega) = f^*(\omega).$$

Si l'on tient compte de ces remarques et de la proposition précédente le produit scalaire :

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) g^*(\omega) \varphi_e(\omega) d\omega$$

s'écrit encore

$$(f, g) = \int_{-j\infty}^{+j\infty} F(s) G(-s) \varphi_e\left(\frac{s}{j}\right) ds.$$

Problème.

Il en résulte que la fonctionnelle $\mathcal{J}$ à valeurs (II,3.)

$$(III,1) \quad \mathcal{J}(K) = \mathcal{J}(0) + (A, BK) + (BK, A) + (BK, BK)$$

est définie sur $\mathcal{Q}^+$. Pour traiter le problème énoncé dans le paragraphe II,1. on peut déterminer $K(s)$ de manière à minimiser $\mathcal{J}(K)$ sur $\mathcal{Q}^+$.

III,2. Condition extrémale - Propriétés du minimum.

III,2.1. Condition extrémale.

λ étant un scalaire quelconque et $\delta K(s)$ un élément de $\mathcal{Q}^+$, $K(s) + \lambda \delta K(s) \in \mathcal{Q}^+$. Comme J est une fonctionnelle convexe, la fonction numérique $\lambda \rightarrow J(K + \lambda \delta K)$ est convexe. Pour qu'à $K(s)$ corresponde un minimum de (III,1) il est nécessaire et suffisant que cette fonction admette un minimum en $\lambda=0$. La condition s'écrit :

$$\left(\frac{\partial J(K + \lambda \delta K)}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} = 0 \iff (A + BK, B \delta K) + (B \delta K, A + BK) = 0$$

d'où la Proposition.

Pour que $K(s) \in \mathcal{Q}^+$ minimise (III,1), il est nécessaire et suffisant que $K(s)$ soit solution sur $\mathcal{Q}^+$ de l'équation intégrale :

$$(III,2) \quad \int_{-j\infty}^{+j\infty} G(s) \delta K(s) ds + \int_{-j\infty}^{+j\infty} G(-s) \delta K(-s) ds = 0$$

dans laquelle $\delta K(s)$ est une fonction admissible quelconque et

$$(III,3) \quad G(s) = [A(-s) B(s) + B(s) B(-s) K(-s)] \varphi_e\left(\frac{s}{j}\right)$$

le problème conduit à la résolution de l'équation intégrale (III,2) sur $\mathcal{Q}^+$.

III,2.2. Propriétés fondamentales. Unicité du minimum.

D'après la proposition précédente, à toute solution du système (III,2), (III,3) sur $\mathcal{Q}^+$ est associée une valeur optimale de (III,1). Soient $K_1(s)$ et $K_2(s)$ deux telles solutions. Alors :

$$\begin{aligned} J(K_1 + \lambda \delta K_1) &\geq J(K_1) & \forall \delta K_1 \in \mathcal{Q}^+ \\ J(K_2 + \lambda \delta K_2) &\geq J(K_2) & \forall \delta K_2 \in \mathcal{Q}^+. \end{aligned}$$

Ces relations vérifiées en particulier pour :

$$\lambda = 1, \quad \delta K_1 = -\delta K_2 = K_2 - K_1$$

entraînent $J(K_1) = J(K_2)$. Cette propriété du minimum est une conséquence immédiate de la convexité de J .

Proposition :

| S'il existe, le minimum de $J(K)$ sur $\mathcal{Q}^+$ est unique. Nous le noterons J_m . Quel que soit $K(s) \in \mathcal{Q}^+$ (resp $K(j\omega) \in \mathcal{K}$) : $J(K) \geq J_m$.

Conséquence.

Dans le chapitre II nous avons défini $m = \lim_{K \in \mathcal{K}} J(K)$. Nous allons comparer J_m et m . Désignons par $K_m(s)$ une solution de (III,2) sur $\mathcal{Q}^+$: $J_m = J(K_m)$. D'après la proposition précédente, $J(K_m)$ est un minorant de l'ensemble des valeurs $J(K)$ d'où : $J(K_m) \leq m$.

Comme $K_m(j\omega) \in \mathcal{K}$ et que m est un minorant de l'ensemble $J(K)$, $K \in \mathcal{K}$, on a aussi $m \leq J(K_m)$.

Il vient donc : $m = J(K_m)$.

Proposition.

| Lorsque le système (III,2), (III,3) a des solutions sur $\mathcal{Q}^+$, $J_m = m$.

Des propriétés établies à la suite du théorème II,1,2, il résulte que, $K_m(j\omega)$ est unique sur $\mathcal{K}$, à un ensemble de mesure nulle près par rapport à la mesure ϕ_b de densité $|B(j\omega)|^2 \varphi_e(\omega)$. Si l'on tient compte de l'équivalence entre le problème de minimum et la résolution du système (III,2), (III,3), cette propriété d'unicité conduit aux deux énoncés équivalents suivants :

Proposition.

| Aux solutions sur $\mathcal{Q}^+$ du système d'équations (III,2), (III,3) correspondent sur $\mathcal{K}$ des fonctions égales

presque partout par rapport à la mesure ϕ_b .

ou

S'il existe sur $\mathcal{A}^*$, des solutions au problème de minimum, elles définissent sur $\mathcal{K}$ des fonctions égales presque partout par rapport à la mesure ϕ_b .

Nous dirons que la solution optimale est unique à un ensemble de mesure nulle près par rapport à ϕ_b . On peut remarquer que $K_m(j\omega)$ se développe sous la forme

$$K_m(j\omega) = \sum_p k_{mp} f_p(\omega).$$

Les coefficients k_{mp} sont solution du système linéaire infini :

$$(A, Bf_p) + (Bf_p, A) + \sum_q k_{mq} [(Bf_q, Bf_p) + (Bf_p, Bf_q)] = 0.$$

III,3. Propriétés générales de l'équation intégrale (III,2).

Le problème est rapporté à la résolution de (III,2) sur $\mathcal{A}^*$. En nous référant à des techniques classiques de résolution ([12] chap. IV), nous allons démontrer un ensemble de propriétés de cette équation intégrale.

III,3.1. Théorème.

Toute fonction $G(s)$ solution de l'équation intégrale

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty} G(s) \delta K(s) ds + \int_{-j\infty}^{+j\infty} G(-s) \delta K(-s) ds = 0$$

est solution de l'équation

$$(III,4) \quad \int_{-j\infty}^{+j\infty} G(s) \delta K(s) ds = 0$$

ou de son homologue

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty} G(-s) \delta K(-s) ds = 0.$$

Pour le montrer il suffit d'écrire $G(s) \delta K(s)$ [resp. $G(-s) \delta K(-s)$] sous la forme :

$$G(s) \delta K(s) = G_p(s) + G_{ip}(s) \quad \left[\text{resp.} \quad G(-s) \delta K(-s) = G_p(s) - G_{ip}(s) \right]$$

où $G_p(s)$ désigne une fonction paire de s , $G_{ip}(s)$ une fonction impaire de s ; $G(s)$ étant solution de (III,2),

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty} G_p(s) ds = 0 \implies G(s)$$

vérifie (III,4). La réciproque est évidente.

III,3.2. Proposition.

Soit $\mathcal{A}^-$ l'ensemble des fonctions holomorphes en tout point du demi plan complexe $\operatorname{Re} s \leq 0$.

$$\delta K(s) \in \mathcal{A}^+ \iff \delta K(-s) \in \mathcal{A}^-.$$

(III,5) Pour que la relation $\int_{-j\infty}^{+j\infty} F(s) \delta K(-s) ds = 0$, soit vérifiée, quelque soit $\delta K(-s) \in \mathcal{A}^-$ il suffit que $F(s)$ soit holomorphe en tout point du demi plan $\operatorname{Re} s \leq 0$ et vérifie la propriété $\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = 0$.

La démonstration est une conséquence immédiate du théorème de **Cauchy** et du lemme de **Jordan** appliqués au calcul de l'intégrale $\int_{\gamma} F(s) \delta K(-s) ds$ sur le bord orienté γ du contour formé par :

- le segment de l'axe imaginaire compris entre $-R$ et $+R$;
- la demi circonférence de centre 0 , $|s| = R$, $\operatorname{Re} s < 0$, pour $R \rightarrow \infty$.

III,3.3. Théorème fondamental.

Nous limitant au cas particulier des solutions représentées par des fractions rationnelles, et appelées solutions rationnelles, nous allons démontrer le théorème suivant :

Soit $\mathcal{G}^-$ la classe des fractions rationnelles holomorphes en tout point du demi plan complexe $\operatorname{Re} s \leq 0$ et tendant vers zéro à l'infini comme $1/s^2$.

Pour que $F(s)$ soit solution rationnelle de

$$(III, 5) \quad \int_{-j\infty}^{+j\infty} F(s) \delta K(-s) ds = 0$$

quel que soit $\delta K(-s) \in \mathcal{Q}^-$, il est nécessaire et suffisant que $F(s) \in \mathcal{G}^-$.

Démonstration.

Si $F_1(s)$ est une fraction rationnelle solution de (III,5), les propriétés à l'infini des fonctions admissibles $\delta K(-s)$ et l'existence de l'intégrale, indiquent que $F_1(s)$ n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire, et que $F_1(s) = O(1/s^2)$.

Supposons que $F_1(s)$ ait des pôles dans le demi plan $\operatorname{Re} s < 0$. Alors

$$F_1(s) = \sum_{\alpha \geq 1} \sum_p \frac{k_{p,\alpha}}{(s+s_p)^\alpha} + f_1(s)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{p,\alpha} \in \mathbb{C} \quad , \quad \operatorname{Re} s_p > 0 \\ f_1(s) \end{array} \right. \quad \text{est une fonction holomorphe.}$$

On peut choisir R assez grand pour que $F_1(s)$ n'ait pas de pôles pour $|s| \geq R$, $\operatorname{Re} s < 0$. Calculons alors l'intégrale $\int_{\gamma} F_1(s) \delta K(-s) ds$ sur le bord orienté du contour γ formé par

- le segment de l'axe imaginaire compris entre $-R$ et $+R$,
- la demi-circonférence $|s| = R$, $\operatorname{Re} s < 0$, pour $R \rightarrow \infty$. Il résulte du lemme de **Jordan** et de l'hypothèse que

$$\sum \text{Résidus } F_1(s) \delta K(-s) = 0, \quad \forall \delta K(-s) \in \mathcal{Q}^-.$$

Cette relation est vérifiée en particulier pour $\delta K(-s) = \frac{1}{s-x}$ quelque soit x , $\operatorname{Re} x > 0$. Il vient :

$$F_1(s) \delta K(-s) = \sum_{\alpha \geq 1} \sum_p \frac{k_{p,\alpha}}{(s+s_p)^\alpha} \frac{1}{s-x} + f_1(s) \frac{1}{s-x}$$

$$\frac{k_{p,\alpha}}{(s+s_p)^\alpha} \frac{1}{s-x} = - \frac{k_{p,\alpha}}{(s+s_p)^\alpha (s_p+x)} \left[1 + \frac{s+s_p}{s_p+x} + \dots + \frac{(s+s_p)^n}{(s_p+x)^n} + \dots \right].$$

Alors :

$$\operatorname{Rés} \left(\frac{k_{p,\alpha}}{(s+s_p)^\alpha} \frac{1}{s-x} \right) = \frac{k_{p,\alpha}}{(s_p+x)^\alpha}$$

$$\sum \operatorname{Rés} F_1(s) \delta K(-s) = \sum_p \sum_{\alpha \geq 1} \frac{k_{p,\alpha}}{(s_p+s_p)^\alpha}.$$

Ce résultat conduit à la relation :

$$\sum_p \sum_{\alpha \geq 1} \frac{k_{p,\alpha}}{(s_p+s_p)^\alpha} = 0$$

vérifiée quel que soit x , $\operatorname{Re} x > 0$ qui entraîne $k_{p,\alpha} = 0$, $\forall p, \forall \alpha$. $F_1(s)$ vérifiant $F_1(s) = f_1(s)$ et $F_1(s) = O(1/s^2)$ appartient à $\mathcal{G}^-$. Toute fraction rationnelle solution de (III,5) est un élément de $\mathcal{G}^-$. La réciproque est un cas particulier de (III,3.2).

B- CAS PARTICULIER DE RÉOLUTION

Ces généralités étant établies, nous allons chercher des solutions effectives au problème sous une forme explicite à la fois simple et facilement représentable. A cette fin et d'après les propriétés d'unicité III,2.2. il y aura toujours avantage à rechercher des solutions de forme rationnelle.

III,4. Hypothèses.

Ces objectifs, ont amené à envisager des cas simplifiés de résolution qui supposent réalisées les hypo-

thèses suivantes :

- 1 - les fonctions de transfert $A(s)$, $B(s)$ sont des fractions rationnelles de $\mathcal{Q}^+$;
- 2 - la densité spectrale $\varphi_e(\omega)$ est une fraction rationnelle.

En fait, ces conditions ne restreignent pas le problème, car elles correspondent à de nombreux cas physiques tels que :

- problèmes de vibrations aléatoires pour lesquels les équations d'état sont des équations différentielles linéaires;
- systèmes admettant un modèle rationnel au sens défini en (I,4.3).

Pour déterminer des solutions rationnelles, la résolution que nous allons développer est justifiée par le théorème (III,3.3.) . Elle représente une application des techniques utilisées en automatique et déduites de la théorie du filtre optimal de Wiener.

III,5. Détermination et propriétés de la solution rationnelle.

Sous les hypothèses précédentes la recherche d'une solution rationnelle de (III,2), (III,3) sur $\mathcal{Q}^+$, est équivalente à la recherche d'une fraction rationnelle possédant la propriété (P) .

$$(P): K(s) \in \mathcal{Q}^+ \text{ et } G(-s) \in \mathcal{G}^-.$$

Nous aboutirons à une expression explicite par factorisation et nous démontrerons un ensemble de propriétés de la solution.

III,5.1. Expression de $G(-s)$.

La relation (III,3.) permet d'exprimer $G(-s)$ sous la forme générale :

$$(III,6) \quad G(-s) = [P(s) + Q(s) K(s)] \varphi_e\left(\frac{s}{j}\right).$$

Dans cette expression $P(s) = A(s) B(-s)$, $Q(s) = B(s) B(-s)$ représentent des fractions rationnelles bornées, et la fraction rationnelle $\varphi_e\left(\frac{s}{j}\right)$ vérifie $\varphi_e\left(\frac{s}{j}\right) = O\left(\frac{1}{s^2}\right)$ car ϕ_e est une mesure positive bornée.

En appliquant la propriété suivante :

Toute fraction rationnelle $R(s)$ se factorise d'une manière unique en

$$\begin{cases} R(s) = R^+(s) R^-(s) \\ R^+(s) \text{ n'admet ni pôle ni zéro dans le demi plan } \operatorname{Re} s > 0 \\ R^-(s) \text{ n'admet ni pôle ni zéro dans le demi plan } \operatorname{Re} s \leq 0 \end{cases}$$

la relation (III,6) s'écrit :

$$G(-s) = Q^-(s) \varphi_e^-(s) \left[\frac{P(s) \varphi_e^+(s)}{Q^-(s)} + Q^+(s) \varphi_e^+(s) K(s) \right]$$

Avec

$$\begin{cases} Q(s) = Q^+(s) Q^-(s) \\ \varphi_e\left(\frac{s}{j}\right) = \varphi_e^+(s) \varphi_e^-(s) . \end{cases}$$

III,5.2. Expression de la solution.

D'après les propositions (III,2.2.), s'il existe au problème une solution rationnelle, cette solution est unique à un ensemble de mesure nulle près par rapport à la mesure ϕ_b de densité $|B(j\omega)|^2 \varphi_e(\omega)$. Nous la désignerons par $K_m(s)$, pour en chercher une forme explicite. Pour obtenir $K_m(s)$ on exprime d'abord que $G(-s) \in \mathcal{G}^-$ ou que $Q^+(s) \varphi_e^+(s) K_m(s)$ coïncide avec

$$\left[\frac{P(s) \varphi_e^+(s)}{Q^-(s)} \right]^+$$

partie du développement en éléments simples de

$$\frac{P(s) \varphi_e^+(s)}{Q^-(s)}$$

ne contenant pas de pôles dans le demi plan $\operatorname{Re} s > 0$. Alors $K_m(s)$ est définie par

$$(III,7) \quad K_m(s) = - \frac{\left[\frac{P(s) \varphi_e^+(s)}{Q^-(s)} \right]^+}{Q^+(s) \varphi_e^+(s)}$$

sous la condition $K_m(s) \in \mathcal{Q}^+$.

Cette solution est à rapprocher de la solution du problème de **Wiener** (par exemple [24] chap. III).

Proposition.

Si $K_m(s)$ (III,7) appartient à $\mathcal{Q}^+$, le problème de minimum a une solution rationnelle. Cette solution, définie par (III,7) est unique à un ensemble de mesure nulle près par rapport à la mesure $\hat{P}_b$.

Remarque.

Lorsque $B(s) \equiv B^+(s)$, $K_m(s) = -\frac{A(s)}{B(s)} \in \mathcal{Q}^+$. On retrouve la solution triviale, mentionnée avec la relation (II,4).

III,5,3. Unicité de la solution.

Pour le problème, nous allons montrer que l'unicité est réalisée au sens strict.

Proposition :

Lorsque $G(s)$ vérifie (III,3), il existe au plus une solution rationnelle de (III,2) sur $\mathcal{Q}^+$.

La démonstration de [44] peut être étendue de la manière suivante :

Supposons qu'il existe deux fractions rationnelles $K_1(s)$ et $K_2(s)$ possédant la propriété (P), il leur correspond $G_1(-s)$ et $G_2(-s) \in \mathcal{G}^-$, par différence il vient nécessairement $Q^+(s) \varphi_e^+(s) [K_1(s) - K_2(s)] \in \mathcal{Q}^-$. $Q(s) = B(s) B(-s)$, n'a pas de pôles imaginaires purs car $B(s) \in \mathcal{Q}^+$. Nous allons factoriser en tenant compte des zéros imaginaires purs éventuels

$$B(s) = \frac{b_1^+(s) b_1^-(s)}{b_2^+(s)} \prod_{i,p} (s + s_i)^p$$

où $\operatorname{Re} s_i = 0$

{ les fonctions indicées représentent des polynômes respectant la convention :
+ zéros à partie réelle négative,
- zéros à partie réelle positive.

Un calcul immédiat conduit à :

$$Q^+(s) = B^+(s) B^+(-s) = \prod_{i,p} (s + s_i)^p \prod_{i,p} (-s + s_i)^p \frac{b_1^+(s) b_1^+(-s)}{b_2^+(s)}.$$

On écrira de même

$$\varphi_e\left(\frac{s}{j}\right) = \varphi_e^-(s) \varphi_e'^+(s) \prod_{z,q} (s + s'_z)^q$$

où l'on a posé

$$\varphi_e^+(s) = \prod_{z,q} (s + s'_z)^q \varphi_e'^+(s)$$

de manière à extraire éventuellement les zéros imaginaires purs $\operatorname{Re} s'_z = 0$.

Comme $\varphi_e\left(\frac{s}{j}\right) = O\left(\frac{1}{s^2}\right)$ est une fraction rationnelle paire, les conventions relatives aux positions respectives des pôles et des zéros entraînent que $\varphi_e'^+(s) = O(1/s)$, $B(s)$ appartenant à $\mathcal{Q}^+$, il en résulte que

l'expression $\prod_{i,p} (s + s_i)^p \frac{b_1^+(s) b_1^+(-s)}{b_2^+(s)} \varphi_e'^+(s)$ est de la forme $\frac{n(s)}{d^+(s)}$ avec $\deg. n(s) < \deg. d^+(s)$.

De plus $(K_1(s) - K_2(s)) \in \mathcal{Q}^+$ est une fraction rationnelle $\frac{k_1(s)}{k_2(s)}$, telle que $\deg. k_1(s) \leq \deg. k_2(s)$.

La condition $Q^+(s) \varphi_e^+(s) [K_1(s) - K_2(s)] \in \mathcal{Q}^-$ s'écrit maintenant :

$$\prod_{z,q} (s + s'_z)^q \prod_{i,p} (-s + s_i)^p \frac{n(s)}{d^+(s)} \frac{k_1(s)}{k_2(s)} \in \mathcal{Q}^-.$$

Sa validité entraîne nécessairement que :

$$\begin{aligned} n(s) \text{ contient les zéros de } k_2(s) &\Rightarrow \deg. n(s) \geq \deg. k_2(s) \\ k_1(s) \text{ contient les zéros de } d^+(s) &\Rightarrow \deg. k_1(s) \geq \deg. d^+(s) . \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \deg. d^+(s) \leq \deg. k_1(s) \leq \deg. k_2(s) \leq \deg. n(s) .$$

Ce résultat est incompatible avec $\frac{n(s)}{d^+(s)} = O\left(\frac{1}{s}\right)$. Il en résulte donc que, pour le problème la solution rationnelle (III, 7) est unique.

III,5.4. Propriété de la solution (III,7).

Les pôles de $K_m(s)$ sont en général les racines de $\frac{Q^+(s) \varphi_e^+(s)}{P^+(s)}$.

Revenant à l'expression (III,7), nous pouvons écrire d'une manière générale

$$\begin{aligned} P(s) &= \frac{p(s)}{p_2^+(s) p_2^-(s)} \\ Q(s) &= \frac{q_1^+(s) q_1^-(s)}{q_2^+(s) q_2^-(s)} \\ \varphi_e^+(s) &= \frac{\varphi_1^+(s)}{\varphi_2^+(s)} \end{aligned}$$

où les fonctions indicées sont des polynômes dont les zéros vérifient les conventions de la factorisation initiale III,5.1. $K_m(s)$ est alors une fraction rationnelle de forme

$$K_m(s) = \frac{z(s)}{p_2^+(s) q_1^+(s) \varphi_1^+(s)}$$

où $z(s)$ désigne un polynôme $K_m(s)$ est généralement la somme :

- d'une fraction rationnelle dont les pôles sont racines de $\frac{Q^+(s)}{P^+(s)} = \frac{B^+(s) \hat{B}^+(-s)}{A^+(s)}$ et dépendent des caractéristiques du système à optimiser;
- d'une fraction rationnelle dont les pôles, racines de $\hat{\varphi}_e^+(s)$ dépendent de l'excitation.

III,5.5. Existence de la solution sur $\mathcal{Q}^+$ conditions suffisantes.

Les propriétés précédentes n'ont de sens pour le problème que si $K_m(s) \in \mathcal{Q}^+$. Il convient de vérifier :

- que la fraction rationnelle (III,7) n'a pas de pôle imaginaire pur;
- qu'elle est holomorphe à l'infini.

Dans le cas général, on peut remarquer que : $\deg. K_m(s) \leq \deg. \frac{P(s)}{Q(s)}$. Si $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{P(s)}{Q(s)} < \infty$,

alors $K_m(s)$ est holomorphe à l'infini. Cette remarque et la propriété (III,5.4.) permettent d'énoncer une condition suffisante d'existence de $K_m(s)$ de la manière suivante :

Si $\varphi_e\left(\frac{s}{j}\right) \frac{Q(s)}{P(s)}$ n'a pas de zéro imaginaire pur et si $\frac{P(s)}{Q(s)}$ est bornée, $K_m(s)$ est un élément de $\mathcal{Q}^+$.

III,5.6. Conséquences; une méthode de résolution.

Des propriétés de la solution minimale rationnelle, nous déduirons la méthode suivante :

Les fonctions $A(s)$, $B(s)$, $\varphi_e\left(\frac{s}{j}\right)$ étant données, désignons par s_L et $(T_1 + jV_1)$ les racines de

$$\varphi_e\left(\frac{s}{j}\right) \frac{B(s)}{A(s)} \quad (s_L, T_1, V_1 \in \mathbb{R} - \{0\})$$

$K_m(s)$ se développe sur $\mathbb{R}$ en fractions rationnelles de la forme

$$\frac{1}{(1 + |s_L|)^n} + \frac{1}{(s^2 + 2s|T_1| + (T_1^2 + V_1^2))^h} + \frac{s}{(s^2 + 2s|T_1| + (T_1^2 + V_1^2))^h}$$

que nous désignerons par $D_q(s)$, $q \in JCN$ avec $D_0(s) = 1$. Il vient alors :

$$(III,8) \quad K_m(j\omega) = \sum_{q \in JCN} \lambda_{q,m} D_q(j\omega) .$$

Les scalaires $\lambda_{q,m}$ sont solution du système linéaire :

$$(III,9) \quad (A, BD_q) + (BD_q, A) + \sum_{q \in JCN} \lambda_q \left[(BD_q, BD_q) + (BD_q, BD_q) \right] = 0.$$

La résolution du problème se décompose donc en :

- calcul des racines de $\varphi_e \left(\frac{s}{J} \right) \frac{B(s)}{A(s)}$,
- étude et résolution d'un système de **Cramer**.

Elle peut être exploitée facilement par la voie numérique.

III,6. Fonction spectrale quelconque. Perturbation de la solution précédente.

Nous nous proposons de revenir sur les hypothèses III,4. et d'étendre la solution prise sous la forme rationnelle précédente au cas où la densité spectrale est quelconque. Les hypothèses de l'étude sont les suivantes.

- 1 - les fonctions de transfert $A(s)$; $B(s)$, sont des fractions rationnelles de $\mathcal{A}^+$;
- 2 - il existe pour la densité spectrale de l'entrée $\varphi_e'(\omega)$ un modèle spectral « voisin » rationnel $\varphi_e(\omega)$ (au sens que nous précisons);
- 3 - Relativement à la densité spectrale $\varphi_e(\omega)$ le problème admet la solution rationnelle (III,8). Revenant au produit scalaire défini sur $\mathcal{H}$ nous pouvons écrire :

$$(III,10) \quad J(K) = J(0) + 2 \langle F, V \rangle + \langle CV, V \rangle$$

où

$$V = \{ \lambda_q \}_{q \in JCN}, \quad F = \{ I_q \}_{q \in J} \quad \text{avec} \quad I_q = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{pq} (A^* BD_q) \varphi_e(\omega) d\omega$$

sont des suites de $\mathcal{H}_J \subset \mathcal{H}$ et C un opérateur linéaire symétrique, opérant dans l'espace des suites.

$$C: V \in \mathcal{H}_J \rightarrow CV = \left\{ \sum_{q \in J} \lambda_q R_{pq} \right\}_{p \in J}$$

$$R_{pq} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |B|^2 (D_q D_p^* + D_p D_q^*) \varphi_e(\omega) d\omega.$$

Le minimum de (III,10) est réalisé pour :

$$(III,11) \quad V_m = -C^{-1}F \text{ soit } K(j\omega) = K_m(j\omega)$$

Alors

$$J(K_m) = J_m.$$

Nous allons analyser la perturbation v de cette solution V_m , lorsque $\varphi_e'(\omega)$ intervient dans les calculs.

III,6.1. Notion de densités spectrales « voisines ».

Relativement aux mesures de densités $\varphi_e(\omega)$ et $\varphi_e'(\omega)$ nous pouvons définir sur $\mathcal{K}$ les topologies associées aux produits scalaires suivants :

$$(f, g)_e = \int_{-\infty}^{+\infty} f g^* \varphi_e(\omega) d\omega \quad \text{et} \quad (f, g)_{\underline{e}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f g^* \varphi_e'(\omega) d\omega$$

considérons un sous espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{K}$.

Nous dirons que les densités spectrales φ_e et φ_e' sont « voisines » sur $\mathcal{V}$, lorsque les normes $\|f\|_e$ et $\|f\|_{\underline{e}}$, ont des valeurs voisines pour tout $f \in \mathcal{V}$.

Dans le cas du problème qui nous intéresse, $\mathcal{V}$ est engendré par $A(j\omega)$ et $(B(j\omega) D_q(j\omega))_{q \in JCN}$. Nous traduirons que $\varphi_e(\omega)$ et $\varphi_e'(\omega)$ sont « voisines » par :

il existe ε , tel que

$$\left| \|A\|_e^2 - \|A\|_{\underline{e}}^2 \right| \leq \varepsilon$$

$$\left| \|B D_q\|_e^2 - \|B D_q\|_{\underline{e}}^2 \right| \leq \varepsilon, \quad \forall q \in J$$

ε fixe la qualité de l'approximation.

Cette définition entraîne que les valeurs

$$J(K) = J(0) + (A, BK)_e + (BK, A)_e + (BK, BK)_e \quad \text{où} \quad J(0) = (A, A)_e$$

$$J'(K) = J'(0) + (A, BK)_{\underline{e}} + (BK, A)_{\underline{e}} + (BK, BK)_{\underline{e}} \quad \text{où} \quad J'(0) = (A, A)_{\underline{e}}$$

de la fonctionnelle $\mathcal{J}$, sont «voisines» sur $\mathcal{R}$ pour tout $K(j\omega) \in \mathcal{V}$.

III,6.2. Etude des perturbations de F et C .

Pour pouvoir déterminer explicitement la perturbation v nous sommes amenés à définir sur $\mathcal{H}_J$ la norme suivante :

$$\|V\| = \sup_{q \in J \subset N} |\lambda_q|$$

équivalente à la norme associée au produit scalaire comme $\mathcal{H}_J$ est de dimension finie.

Il lui correspond, pour l'opérateur borné C :

$$\|C\| = \sup_{\|V\| \leq 1} \|C V\| \iff \|C\| = \sup_{p \in J} \sum_q |\mathcal{R}_{pq}|.$$

Désignons par C' et F' les homologues de C et F calculés avec $\varphi'_e(\omega)$. Il est immédiat de vérifier que

$$\begin{aligned} |I_q - I'_q| &\leq \left| \|A\|_e^2 - \|A\|_{\underline{e}}^2 \right|^{1/2} \left| \|BD_q\|_e^2 - \|BD_q\|_{\underline{e}}^2 \right|^{1/2} \leq \varepsilon \\ |\mathcal{R}_{pq} - \mathcal{R}'_{pq}| &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{cases} C' = C + C_\varepsilon & \|C_\varepsilon\| \leq J \cdot \varepsilon \\ F' = F + F_\varepsilon & \|F_\varepsilon\| \leq \varepsilon \end{cases}$$

C_ε et F_ε représentent les perturbations de C et F .

III,6.3. Perturbation de la solution.

Etant donné l'intérêt des solutions rationnelles, nous chercherons, avec la densité spectrale $\varphi'_e(\omega)$ une solution de la forme

$$K'(j\omega) = \sum_{q \in J} \lambda'_q D_q(\omega)$$

La fonctionnelle $\mathcal{J}$ est maintenant à valeurs

$$\mathcal{J}'(K') = \mathcal{J}'(0) + 2 \langle F' V' \rangle + \langle C' V', V' \rangle \quad \text{où } V' = \{\lambda'_q\}_{q \in J}.$$

Elle atteint son minimum pour

(III,12)

$$V'_m = -C'^{-1} F'^{-1}$$

Il lui correspond la solution $K'_m(j\omega)$ et $\mathcal{J}'_m = \mathcal{J}'(K'_m)$. Nous allons comparer les deux solutions optimales $K_m(j\omega)$ et $K'_m(j\omega)$ en analysant la perturbation v définie par :

(III,13)

$$V'_m = V_m + v$$

D'après les relations précédentes (III,11) et (III,12), il vient :

$$\begin{aligned} (C_\varepsilon + C) v &= -F_\varepsilon + C_\varepsilon V_m \\ C' &= C (1 + C^{-1} C_\varepsilon) \end{aligned}$$

avec

$$\|C^{-1} C_\varepsilon\| \leq \varepsilon J \|C^{-1}\|$$

inférieur à 1 pour une approximation acceptable.

$$C'^{-1} = (1 - C^{-1} C_\varepsilon + R_\varepsilon) C^{-1} \quad R_\varepsilon = O(\varepsilon^2)$$

$$v = (1 - C^{-1} C_\varepsilon + R_\varepsilon) C^{-1} (-F_\varepsilon + C_\varepsilon V_m)$$

v est de la forme :

(III,14)

$$\begin{aligned} v &= v_\varepsilon + z_\varepsilon \quad \text{où : } v_\varepsilon = C^{-1} (-F_\varepsilon + C_\varepsilon V_m) \\ &\begin{cases} \|v_\varepsilon\| \leq \varepsilon \|C^{-1}\| (1 + J \|V_m\|) \\ \|z_\varepsilon\| = O(\varepsilon^2) \end{cases} \end{aligned}$$

La perturbation v , ayant v_ε pour partie principale, est infiniment petite avec ε . Alors

$$K'_m(j\omega) = K_m(j\omega) + \sum_{q \in J} \varepsilon_q D_q(j\omega)$$

$$v = \{\varepsilon_q\}_{q \in J} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon_q = 0.$$

Proposition.

Si le calcul est effectué avec une fonction spectrale quelconque $\varphi'_e(\omega)$ et que :

- 1 - $\varphi'_e(\omega)$ admet un modèle « voisin » rationnel $\varphi_e(\omega)$;
- 2 - on impose à la solution la forme rationnelle (III,8) trouvée lorsque $\varphi_e(\omega)$ intervient dans le calcul. Alors la solution optimale obtenue diffère peu de la solution minimale relative à $\varphi_e(\omega)$.

Les relations (III,13) et (III,14) permettent d'apprécier la valeur de l'approximation et d'établir les bases d'un calcul d'erreurs.

Dans les cas pratiques, qui feront l'objet des applications, les hypothèses de la proposition sont souvent réalisées, et on pourra se limiter aux solutions de forme rationnelle.

Corollaire.

les valeurs optimales J_m et J'_m , correspondant aux solutions $K_m(j\omega)$ et $K'_m(j\omega)$ sont « voisines ».

Revenant aux notations (II,3) du chapitre II

$$J_m = J(0) + (A, B K_m)_e + (B K_m, A)_e + (B K_m, B K_m)_e;$$

$$J'_m = J'(0) + (A, B K'_m)_e + (B K'_m, A)_e + (B K'_m, B K'_m)_e.$$

Par une démonstration analogue à celle de (II,3.1.) il est immédiat d'effectuer une majoration de $|J_m - J'_m|$ et de vérifier que $|J_m - J'_m| = O(\varepsilon)$. Ce résultat est une conséquence directe

- de la définition des densités spectrales voisines;
- de la propriété $\|K_m - K'_m\| = O(\varepsilon)$ évidente d'après (III,14).

C - CONCLUSION

Reprenant l'ensemble des résultats précédents, nous allons dégager une méthode générale de résolution qui satisfasse à des conditions

- 1 - dues au caractère physique du problème : la solution doit être facilement représentable.
- 2 - d'ordre numérique, en correspondance avec la rapidité de convergence de la représentation. Cette notion de convergence déjà mentionnée au chapitre II est importante en vue d'une étude numérique du problème.

Les hypothèses de la résolution sont les suivantes :

- 1 - $A(s), B(s)$ sont des fractions rationnelles de $\mathcal{A}^*$.
- 2 - Il existe, pour la densité spectrale $\varphi'_e(\omega)$ un modèle rationnel « voisin », qu'on ne cherchera pas nécessairement à expliciter.

III,7. Méthode générale de résolution.

III,7.1. Conséquence des résultats précédents.

La solution rationnelle relative à $\varphi_e(\omega)$ et définie par (III,7) ou (III,8), s'écrit encore sur $\mathcal{K}$

$$K_m(j\omega) = \sum_{z \in I} \alpha_{zm} D_z(j\omega) + K_e(j\omega),$$

- les $D_z(j\omega)$ représentent sur l'ensemble $\{D_q(j\omega)\}_{q \in J}$ celles des fractions rationnelles dont les pôles dépendent uniquement du système considéré.

$$K_e(j\omega) \in \mathcal{K} \iff K_e(j\omega) = \sum_p \beta_{ep} f_p(\omega).$$

Alors :

$$(III,15) \quad K_m(j\omega) = \sum_{z \in I} \alpha_{zm} D_z(j\omega) + \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{ep} f_p(\omega).$$

Il est possible de se rapporter au chapitre II et de définir une méthode de résolution approchée qui généralise la précédente, en cherchant une solution de la forme :

$$(III,16) \quad K(j\omega) = \sum_{z \in I} \alpha_z D_z(j\omega) + \sum_p \beta_p f_p(\omega)$$

grâce aux termes $\sum_{z \in I} \alpha_z D_z(j\omega)$, on peut assurer que la représentation (III,16) est plus rapidement convergente que (II,6) : $K(j\omega) = \sum_p k_p f_p(\omega)$. On approxime maintenant $K_m(j\omega)$ par une suite de fractions rationnelles de pôles connus de forme indépendante de la densité spectrale $\varphi_e(\omega)$, souvent difficile à expliciter. Les coefficients optimaux sont les solutions de systèmes linéaires du type (III,9) et (II,9) et on retrouve en particulier le cas trivial (II,4) pour $\beta_p = 0 \quad \forall_p \gg 1$. Lorsque la densité spectrale $\varphi'_e(\omega)$ intervient dans le calcul, il est intéressant de conserver la forme (III,16). Nous avons montré précédemment que la solution $K'_m(j\omega)$ est « voisine » de $K_m(j\omega)$.

III,7.2. Conclusion.

Revenons au problème général II,1. ou III,1. :

Pour optimiser la fonctionnelle à valeurs

$$J(K) = J(0) + (A, BK) + (BK, A) + (BK, BK)$$

on cherchera sur $\mathcal{K}$ une solution de la forme :

$$(III,16) \quad K(j\omega) = \sum_{z \in I} \alpha_z D_z(j\omega) + \sum_p \beta_p f_p(\omega)$$

et on déterminera des solutions approchées rationnelles de pôles connus par tronquage de (III,16).

Les constantes optimales étant solutions d'un système d'équations linéaires la méthode de résolution est facilement exploitable lorsque les fonctions de transfert n'ont pas une forme explicite simple.

Cette méthode satisfait d'autre part, au double objectif suivant :

- elle tient compte du problème de convergence posé dans le chapitre II;
- elle conduit à une solution explicite facilement représentable.



Chapitre IV

VOL D'UN AVION EN ATMOSPHERE TURBULENTE

Ce chapitre est destiné à montrer comment l'optimisation du vol d'un avion en turbulence se rapporte à la forme générale du problème précédent. A cet effet, il a paru indispensable de rappeler les propriétés et les hypothèses fondamentales concernant la définition de la turbulence atmosphérique. La question de la représentation de la structure en vol est abordée par les méthodes habituelles du développement modal pour lequel sont précisés notamment la notion de convergence et le calcul des réponses harmoniques en liaison avec les théories classiques de l'aéroélasticité.

Si l'on s'intéresse aux mouvements et déformations symétriques de la structure, l'optimisation de la réponse en vol longitudinal se présente d'une manière naturelle comme un exemple du problème déjà traité et diverses remarques en vue d'une résolution sont brièvement résumées.

Il faut souligner qu'il s'agit ici d'une présentation purement théorique du problème. En fait, le choix de la loi de pilotage est motivé aussi par des raisons d'ordre technique, qu'il a paru préférable de replacer dans leur contexte aéronautique au cours du chapitre V : applications.

IV. VOL D'UN AVION EN TURBULENCE

IV,1. Turbulence atmosphérique.

Avant d'aborder les problèmes de vols en turbulence il est nécessaire de dégager les notions fondamentales généralement utilisées dans les études aéronautiques théoriques. On est amené à s'intéresser particulièrement à la turbulence en ciel clair, dangereuse car difficilement prévisible. Sa connaissance est souhaitable dans une gamme de longueurs d'ondes variant de quelques dizaines de mètres à quelques kilomètres, et des modèles déduits de résultats expérimentaux et de considérations physiques sont employés.

IV,1.1. Définition.

La turbulence atmosphérique peut être définie comme une fluctuation de la vitesse du vent autour de sa valeur moyenne. On admet que les mouvements turbulents satisfont aux équations de **Navier-Stokes** et à l'équation de continuité.

La difficulté de la résolution du problème de turbulence provient, d'une part, de la non linéarité des équations du mouvement, d'autre part du fait qu'il s'agit :

- d'un phénomène tridimensionnel;
- dont le champ de vitesse est un champ aléatoire de la position et du temps.

IV,1.2. Représentation statistique de la turbulence.

L'étude statistique dont nous rappellerons les résultats [3] [34] suppose le fluide incompressible et le champ turbulent homogène et isotrope - ces hypothèses traduisent une invariance des propriétés statistiques spatiales respectivement dans toute translation et dans toute rotation.

a) corrélations spatiales.

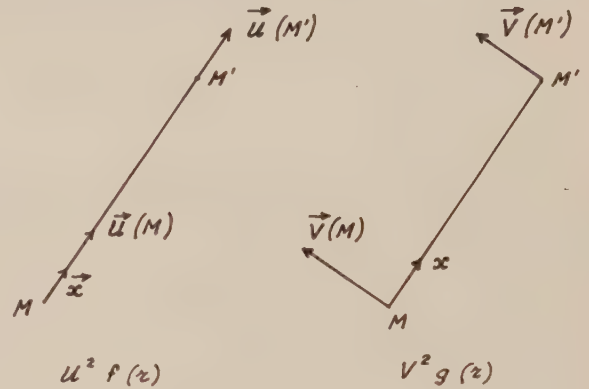
Les vitesses turbulentes ayant une moyenne nulle on est amené à s'intéresser aux moments d'ordre deux, et à définir à un instant donné, un tenseur de corrélations spatiales.

Soient u, v, w , les composantes de la vitesse turbulente relativement à un référentiel $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et deux points M et M' tels que $MM' = z$, compte tenu de la propriété d'homogénéité le tenseur de corrélations spatiales a pour composantes

$$R_{uv}(z) = \overline{u(M) v(M')}$$

(le surlignage traduit une opération de moyenne stochastique $E[u(M) v(M')]$ au temps t). On démontre, sous les hypothèses d'isotropie et d'incompressibilité que ce tenseur dépend, au temps t , des deux fonctions paires : $f(z)$, $g(z)$ définies lorsque $\overline{MM'}$ porte $\vec{x}$, de la manière suivante :

$$(IV,1) \quad \begin{cases} f(z) = \frac{\overline{u(M) u(M')}}{\sigma_u^2} \\ g(z) = \frac{\overline{v(M) v(M')}}{\sigma_v^2} = \frac{\overline{w(M) w(M')}}{\sigma_w^2} \end{cases}$$



les variances des composantes respectives de la vitesse turbulente sont égales en raison de l'isotropie :

$$\sigma_u^2 = \sigma_v^2 = \sigma_w^2.$$

Les deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ appelées respectivement fonctions de corrélation longitudinale et transversale sont liées par l'équation de **Karman**, déduite de l'équation de continuité :

$$g = f + \frac{z}{2} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

On définit d'autre part « l'échelle de turbulence » par la relation :

$$(IV,2) \quad L = \int_0^\infty f(z) dz = 2 \int_0^\infty g(z) dz.$$

L'étude de l'évolution de la répartition statistique au cours du temps, peut être effectuée en utilisant les équations du mouvement. Cette étude dynamique, d'une grande complexité fait notamment l'objet des théories d'**Heisenberg** ([3] chap. V, VI).

b) densités spectrales.

Pour compléter la définition statistique précédente, on démontre que le tenseur spectral transformé du tenseur de corrélations est défini à partir des transformées de **Fourier** respectives $S_u(k)$, $S_w(k)$ de $f(z)$ et $g(z)$. Elles s'expriment en fonction du nombre d'onde k , au moyen des relations

$$(IV,3) \quad \begin{cases} S_u(k) = 2 \sigma_u^2 \int_0^\infty f(z) \cos(2\pi k z) dz \\ S_w(k) = 2 \sigma_w^2 \int_0^\infty g(z) \cos(2\pi k z) dz \end{cases}$$

$S_u(k)$ et $S_w(k)$ appelées respectivement densités spectrales longitudinale et transversale vérifient l'équation déduite de l'équation de **Karman** :

$$2 S_w(k) = S_u(k) - k \frac{\partial S_u(k)}{\partial k}.$$

Elles permettent d'évaluer la répartition de l'énergie entre les différentes longueurs d'onde $\lambda = \frac{1}{k}$ de la turbulence. En particulier l'énergie totale $\frac{1}{2} \sigma^2$ d'agitation par unité de masse est calculée à partir de :

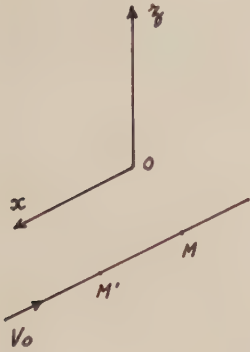
$$\sigma^2 = \int_0^\infty S(k) dk$$

où $S(k)$ et $S_u(k_1)$ sont liées par la relation d'**Heisenberg**.

$$S_u(k_1) = \frac{1}{2} \int_{k_1}^{\infty} \left\{ S(k) (k^2 - k_1^2) / k^3 \right\} dk.$$

IV,1.3. Hypothèses de G.I. Taylor.

Pour un avion volant en palier à une vitesse V_0 l'écoulement moyen a en général une vitesse parallèle à la surface de l'avion.



Le repère de référence est choisi de manière que $\vec{x}$ reste horizontal dirigé dans le sens de l'écoulement et $\vec{z}$ définisse la verticale ascendante.

Selon l'hypothèse de **G.I. Taylor**, la distribution d'énergie est la même, pour une turbulence homogène et isotrope, que l'on fasse une moyenne temporelle (au sens stochastique) en un point, ou une moyenne spatiale instantanée dans la direction de l'écoulement passant par le point. Cette hypothèse permet d'établir une correspondance entre les variables spatiales et temporelles, si l'on effectue la transformation $t \rightarrow x = V_0 t$

sous la condition

$$\frac{\sigma_u^2}{V_0^2} \ll 1.$$

Cette condition est généralement vérifiée pour un avion dont la vitesse est grande.

Considérant la fonction de corrélation croisée :

$$(IV,4) \quad \rho_{u,v}(\tau) = \overline{u(\vec{M}, t) v(\vec{M} + \tau V_0 \vec{x}, t + \tau)}$$

l'hypothèse de **G.I. Taylor** entraîne

$$\rho_{u,v}(\tau) = R_{u,v}(\tau V_0) \quad \text{où} \quad z = \tau V_0$$

et transpose en termes de stationnarité dans le temps, les propriétés d'homogénéité précédentes.

On suppose de plus que le processus de turbulence est ergodique. Cette hypothèse est fondamentale du point de vue expérimental, en particulier lorsque des mesures de turbulence sont effectuées au cours du vol d'un avion. L'ergodicité se traduit dans la définition des fonctions de corrélation :

$$(IV,5) \quad \rho_{u,v}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} u(\vec{M} + Vt \vec{x}, t) v(\vec{M} + V(t + \tau) \vec{x}, (t + \tau)) dt.$$

Conséquences.

Pour les études de vols en turbulence, la composante verticale $w(t)$ sera considérée comme un processus aléatoire

- ergodique, stationnaire, gaussien;
- caractérisé par une densité spectrale $\varphi_w(\omega)$ déduite de $S_w(k)$ en prenant : $k = \frac{\omega}{2\pi V_0}$.

Les calculs aérodynamiques supposent généralement la turbulence uniforme en envergure. Cette propriété est admissible tant que l'échelle de turbulence est grande par rapport aux dimensions de l'avion.

Remarques.

Les hypothèses précédentes correspondent à une turbulence idéale, stationnaire et gaussienne. **H. Press** [45] se basant sur des résultats expérimentaux, propose de considérer globalement la turbulence, comme un ensemble de processus localement stationnaires et gaussiens pour lesquels les formes spectrales, invariantes, dans leur ensemble, diffèrent par les valeurs respectives de σ_w^2 et σ_u^2 .

Dans toute étude relative à la turbulence il est donc nécessaire de prévoir une confrontation avec l'expérience de manière à s'assurer que les calculs théoriques ont toujours un sens.

IV,1.4. Modèles locaux de turbulence.

Comme il n'existe pas de formulation mathématique des fonctions de corrélation et des fonctions spectrales précédentes, des modèles empiriques ont été choisis par interpolation de résultats expérimentaux. Les modèles utilisés en aéronautique dérivent de relations générales indiquées par **N.I. Bullen** [22] selon lesquelles :

$$\begin{cases} f(z) = \left[\left(\frac{z}{a} \right)^n / 2^{n-1} \Gamma(n) \right] K_n \left(\frac{z}{a} \right) \\ g(z) = \left[\left(\frac{z}{a} \right)^n / 2^{n-1} \Gamma(n) \right] \left[2 K_n \left(\frac{z}{a} \right) - \frac{z}{a} K_{n-1} \left(\frac{z}{a} \right) \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_u(k) = 2 \sigma_u^2 L / (1 + 4 \pi^2 a^2 k^2)^{n+1/2} \\ S_w(k) = \sigma_w^2 L \left[1 + 8 \pi^2 a^2 k^2 (n+1) \right] / (1 + 4 \pi^2 a^2 k^2)^{n+3/2} . \end{cases}$$

Les fonctions $K_n \left(\frac{z}{a} \right)$ sont les fonctions de **Bessel** d'argument imaginaire, $\Gamma(n)$ la fonction Eulérienne. La longueur caractéristique a est égale à :

$$a = L \left[\Gamma(n) / \sqrt{\pi} \Gamma(n + 1/2) \right] .$$

Un choix du paramètre n , donne les modèles empiriques usuels, proposés respectivement par **Dryden** et **Karman**.

Modèle de Dryden $n = 1/2$

$$(IV,6) \quad \begin{cases} S_u(k) = 2 \sigma_u^2 L / [1 + (2 \pi k L)^2] \\ S_w(k) = \sigma_w^2 L [1 + 3 (2 \pi k L)^2] / [1 + (2 \pi k L)^2]^2 . \end{cases}$$

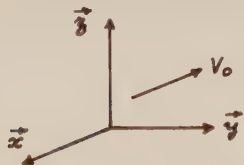
Modèle de Karman $n = 1/3$

$$(IV,7) \quad \begin{cases} S_u(k) = 2 \sigma_u^2 L / [1 + (2,678 \pi k L)^2]^{5/6} \\ S_w(k) = \sigma_w^2 L [1 + 8/3 (2,678 \pi k L)^2] / [1 + (2,678 \pi k L)^2]^{11/6} . \end{cases}$$

Pour les valeurs des nombres d'ondes correspondant au « domaine inertiel », domaine caractérisé par un transfert d'énergie des gros tourbillons en petits tourbillons, le modèle spectral de Karman est en accord avec la théorie de l'analyse dimensionnelle de **Kolmogorov** et avec les résultats de l'étude de **Heisenberg**. Par contre les modèles précédents n'ont plus de sens pour les grands nombres d'ondes correspondant au domaine visqueux. Dans la pratique, cette difficulté est supprimée par le choix d'un nombre d'ondes à partir duquel on admet, en tenant compte de la fonction de transfert de l'avion, que la densité spectrale est nulle.

IV,2. Réponse de la structure en vol.

IV,2.1. Représentation de la structure.



Les déformations et déplacements d'un avion en vol uniforme sont généralement définis par rapport à un référentiel $O x y z$, déterminé par les axes centraux principaux d'inertie de l'avion non déformé - $\vec{x}$ est l'axe longitudinal de l'avion, dirigé dans le sens de l'écoulement, $\vec{z}$ la verticale ascendante.

L'ensemble des forces appliquées au système est formé

- de forces de déformations élastiques;
- de forces de dissipation assimilées à des forces de viscosité;
- de forces aérodynamiques.

La détermination de la réponse est obtenue en appliquant une méthode habituelle en mécanique vibratoire [1] et utilisée en aéroélasticité pour les prévisions de vibrations et les calculs de flottements. Elle consiste à analyser les déformations et déplacements de la voilure dans une approximation linéaire stationnaire de la structure.

Le déplacement vertical de chaque point P de la voilure (gouvernes bloquées) s'exprime alors par une combinaison linéaire des modes propres de vibration

$$(IV,8) \quad z(P, t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \varphi_{\ell}(P) q_{\ell}(t) .$$

Les fonctions $\varphi_\ell(P)$ sont les formes propres du système conservatif associé. Elles rendent compte des symétries de la structure, ce qui entraîne un découplage des degrés de liberté du système par rapport au plan xoy et permet de distinguer deux problèmes respectivement symétrique et antisymétrique. Ces fonctions comprennent les six formes de déplacement (correspondant à $\ell = 1, 2 \dots 6$) et les formes de déformations et sont déterminées par calculs ou par essais de vibrations au sol.

Du fait de l'hermiticité de l'opérateur de l'élasticité, elles vérifient la relation d'orthogonalité :

$$\int_A \int \varphi_i(P) \varphi_\ell(P) d\mu(P) = 0$$

où $d\mu(P)$ représente la masse élémentaire associée à chaque point de l'aile A .

Les coordonnées généralisées $q_\ell(t)$ sont définies par :

$$q_\ell(t) = \int_A \int \zeta(P, t) \varphi_\ell(P) d\mu(P)$$

chaque mode est caractérisé par :

$$(IV,9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{la forme propre } \varphi_\ell(P), \\ \text{la pulsation propre } \omega_\ell, \\ \text{l'amortissement généralisé } \alpha_\ell, \\ \text{la masse généralisée } \mu_{\ell\ell} = \int_A \int \varphi_\ell^2(P) d\mu(P), \\ \text{la raideur généralisée } \gamma_{\ell\ell} = \omega_\ell^2 \mu_{\ell\ell}. \end{array} \right.$$

Equations du mouvement.

L'énergie cinétique du système est donnée par :

$$T = \frac{1}{2} \sum_\ell \mu_{\ell\ell} \dot{q}_\ell^2.$$

De même, l'énergie potentielle $\mathcal{U}$ associée aux déformations élastiques et la fonction de dissipation D sont égales à :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_\ell \mu_{\ell\ell} \omega_\ell^2 q_\ell^2$$

$$D = \sum_\ell \mu_{\ell\ell} \omega_\ell \alpha_\ell \dot{q}_\ell^2.$$

Les forces aérodynamiques qui s'exercent sur la structure en vol, ont pour origine un champ de pression $p(P, t)$. Leur travail virtuel s'exprime par :

$$\delta \mathcal{Z} = \int_A \int p(P, t) \delta \zeta(P) d\zeta(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\zeta(P) \text{ représente l'élément d'aire,} \\ \delta \zeta(P) \text{ le déplacement virtuel du point } P. \end{array} \right.$$

Soit :

$$\delta \mathcal{Z} = \sum_\ell \delta q_\ell \int_A \int p(P, t) \varphi_\ell(P) d\zeta(P).$$

Le champ de pression est la superposition du champ de pression $p_D(P, t)$ du au mouvement de la structure et du champ de pression $p_W(P, t)$ induit par la turbulence sur la structure figée. Soit $\Delta_k(P, t)$ le champ de pression induit au temps t , au point P par un déplacement impulsif du mode k . Puisque l'étude suppose une structure linéaire stationnaire, il vient :

$$p_D(P, t) = \sum_k [\Delta_k(P, t) * q_k](t)$$

$$(IV,10) \quad \delta \mathcal{Z} = \sum_\ell \delta q_\ell \left[Q_\ell(t) + \sum_k (C_{k\ell} * q_k)(t) \right]$$

où

$$C_{k\ell} = \int_A \int \Delta_k(P, t) \varphi_\ell(P) d\zeta(P)$$

$$Q_\ell(t) = \int_A \int p_W(P, t) \varphi_\ell(P) d\zeta(P).$$

Les termes de la forme $\sum_k (C_{k\ell} * q_k)(t)$ sont appelés forces aérodynamiques généralisées, les $Q_\ell(t)$ forces généralisées de rafales.

Les équations de **Lagrange** du mouvement, permettent de caractériser le comportement de la structure en vol, par le système linéaire de rang infini

$$(IV,11) \quad \mu_{\ell\ell} \ddot{q}_\ell + 2\alpha_\ell \mu_{\ell\ell} \dot{q}_\ell + \gamma_{\ell\ell} q_\ell - \sum_k (C_{k\ell} * q_k) = Q_\ell.$$

IV,2.2. Réponses de la structure à la turbulence.

Comme on ne s'intéresse qu'aux mouvements verticaux symétriques de la structure, on peut supposer que l'influence de la turbulence atmosphérique, se manifeste uniquement par la composante verticale $w(t)$ et que cette composante est uniforme en envergure (IV,1.3).

Dans ces conditions, si l'on désigne par C_ℓ la réponse impulsionnelle du $\ell^{\text{ème}}$ mode à la turbulence il vient

$$q_\ell(t) = (C_\ell * w)(t)$$

et le déplacement de chaque point P de la voilure s'écrit

$$(IV,12) \quad z(P, t) = \sum_\ell \varphi_\ell(P) [(C_\ell * w)(t)].$$

Les paramètres de réponse qui ont un intérêt physique sont des processus aléatoires qui se déduisent linéairement des déplacements. Il en est ainsi en particulier des vitesses, des accélérations, des efforts tranchants et des moments fléchissants locaux.

Proposition.

Toute réponse locale $S_w(P, t)$ de la structure à la turbulence, s'exprime par une relation de la forme :

$$(IV,13) \quad S_w(P, t) = \sum_\ell S_\ell(P) [(\lambda_\ell * w)(t)]$$

$S_\ell(P)$ est une transformée linéaire de $\varphi_\ell(P)$,

λ_ℓ la réponse impulsionnelle due à la turbulence relative à q_ℓ ou à l'une de ses transformées linéaires.

Expression des forces généralisées d'excitation.

Appelons $T(P, t)$ le champ de pression induit au temps t au point P par une excitation égale à l'impulsion unité. La turbulence étant supposée uniforme en envergure, nous pouvons écrire :

$$p_w(P, t) = (T(P, t) * w)(t).$$

La force généralisée de rafale $Q_\ell(t)$ est donnée par l'expression :

$$Q_\ell(t) = (T_\ell * w)(t)$$

dans laquelle

$$T_\ell = \iint_A T(P, t) \varphi_\ell(P) d\zeta(P).$$

IV,2.3. Hypothèses sur la convergence du schéma modal.

Il est couramment admis que le schéma modal, même limité à un petit nombre de modes est représentatif des déplacements et déformations de la structure.

Comme nous écartons les problèmes de flottements pour nous intéresser aux réponses stabilisées d'un point de vue aérodynamique, les formes $S_\ell(P)$ sont bornées et les réponses λ_ℓ sont des éléments de $\mathcal{C}^\infty$. Leurs transformées de **Fourier** $(\mathcal{F} \lambda_\ell)(\omega)$ que nous noterons $\tilde{\lambda}_\ell$ sont des éléments de $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}^2(\varphi_w)$ où $\varphi_w(\omega)$ désigne la densité spectrale de turbulence définie à partir de $S_w(k)$ (IV,1.3.).

Nous supposons donc l'hypothèse précédente de convergence, vérifiée sous la forme suivante :

Sur $\mathcal{K}$, le schéma modal limité à un nombre fini de modes est représentatif du comportement de la structure.

Conséquences.

Cette propriété permet :

- de ramener le système d'équations (IV,11) à un système de rang fini R ;
- d'écrire toute réponse sous la forme

$$(IV,14) \quad S_W(P,t) = \sum_{\ell=1}^R S_{\ell}(P) \left[(\lambda_{\ell} * W)(t) \right] \text{ où } \lambda_{\ell} \in \mathcal{E}.$$

Dans les études aéronautiques, la représentation modale est généralement limitée aux six modes d'ensemble et aux premiers modes de déformation de la structure.

IV,3. Eléments statistiques de la réponse.

La réponse $S_W(P,t)$ (IV,14) est un processus aléatoire stationnaire. Nous allons en préciser les éléments statistiques.

IV,3.1. Calcul de la densité spectrale des réponses de la structure à la turbulence.

La densité spectrale de la réponse locale $\bar{S}_W(P,t)$ est donnée par la relation

$$(IV,15) \quad \varphi_S(\omega) = \left| \sum_{\ell=1}^R S_{\ell}(P) \tilde{\lambda}_{\ell}(\omega) \right|^2 \varphi_W(\omega)$$

où $\tilde{\lambda}_{\ell}(\omega) = (\mathcal{F} \lambda_{\ell})(\omega)$, $\tilde{\lambda}_{\ell} \in \mathcal{K}$ d'après (IV,2.3).

Le comportement du système en vol est décrit au moyen des équations (IV,11), ℓ variant de 1 à R . Comme les paramètres de réponse dépendent linéairement (IV,2.2.) des coordonnées généralisées $q_{\ell}(t)$ les réponses harmoniques $\tilde{\lambda}_{\ell}(\omega)$ se déduisent aisément des transformées de Fourier $\tilde{q}_{\ell}(\omega) = (\mathcal{F} q_{\ell})(\omega)$.

Calcul des réponses harmoniques $\tilde{\lambda}_{\ell}(\omega)$.

Elles sont déterminées à partir des fonctions $\tilde{q}_{\ell}(\omega)$ solutions du système de rang R transformé de (IV,11).

$$(IV,16) \quad \left(-\omega^2 \mu_{\ell\ell} + 2j\omega \alpha_{\ell} \mu_{\ell\ell} \omega_{\ell} + \delta_{\ell\ell} \right) \tilde{q}_{\ell}(\omega) - \sum_k \tilde{c}_{k\ell}(\omega) \tilde{q}_k(\omega) = \tilde{T}_{\ell}(\omega).$$

Les fonctions $\tilde{T}_{\ell}(\omega)$ et $\tilde{c}_{k\ell}(\omega)$ désignent les transformées de Fourier respectives de T_{ℓ} et $c_{k\ell}$. Elles sont calculées en aéroélasticité, tout au moins en écoulement subsonique, grâce à la théorie aérodynamique de la surface portante.

IV,3.2. Calcul des forces généralisées.

Nous nous bornerons à indiquer les notions [1] situant le problème aérodynamique et à rappeler une formulation permettant d'obtenir une solution numérique approchée.

Formulation du problème.

Le problème est un problème aux limites posé par les équations classiques de l'aérodynamique. Considéré en régime d'oscillations harmoniques, il consiste à déterminer le champ de pression harmonique $\tilde{\Delta}(P,\omega)$ imposé par une distribution d'angles d'attaques ou incidences locales $\tilde{\alpha}_k(M,\omega)$. Formellement la résolution revient donc à trouver la fonction de Green $G(M,M',\omega)$ telle que

$$(IV,17) \quad \tilde{\Delta}P(M,\omega) = \int_A G(M,M',\omega) \tilde{\alpha}(M',\omega) d\zeta(M').$$

Etant donnée la complexité du problème, on est amené à considérer une « formulation intégrale », pour pouvoir aborder les applications pratiques.

Dans le cas de l'écoulement tridimensionnel instationnaire, une formulation intéressante résulte de l'équivalence entre la surface portante et une nappe de doublets d'accélération. Elle conduit à une équation intégrale de la forme

$$(IV,18) \quad \tilde{\alpha}(M,\omega) = \oint_A K(M,M',\omega) \tilde{\Delta}P(M',\omega) d\zeta(M')$$

dans laquelle le noyau $K(M, M', \omega)$ contient une singularité d'ordre deux et l'intégrale doit être évaluée en partie finie f .

Bien que le calcul présente des difficultés, cette formulation est généralement utilisée. Elle permet de trouver une solution numérique approchée du problème réel.

Forces aérodynamiques généralisées.

Si l'on reprend la condition de non décollement qui est une condition limite du problème, on peut exprimer facilement l'angle d'attaque associé au $k^{ème}$ mode de forme propre $\varphi_k(M)$. En régime harmonique il vient :

$$\tilde{\alpha}_k(M, \omega) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\omega}{V_0} \right) \varphi_k(M).$$

Le champ de pression, induit par un déplacement impulsif du mode k et exprimé par

$$\Delta_k(M, \omega) = \iint_A G(M, M', \omega) \tilde{\alpha}_k(M', \omega) d\zeta(M')$$

est calculé à partir de (IV,18).

La détermination des forces aérodynamiques généralisées résulte alors de la relation

$$\tilde{C}_{k,e}(\omega) = \iint_A \Delta_k(M, \omega) \varphi_e(M) d\zeta(M).$$

Forces de rafales.

Dans le cas d'une turbulence uniforme en envergure; la même méthode s'applique au calcul des forces généralisées de rafales.

En régime harmonique, si l'on tient compte de l'effet de pénétration progressive de l'avion dans la rafale, l'angle d'attaque apparent est défini en tout point P , situé à la distance x de l'appex de la voilure, par la relation

$$\tilde{\alpha}(P, \omega) = \frac{W}{V_0} e^{j\omega t} e^{-\frac{j\omega x}{V_0}}.$$

Le champ de pression harmonique résultant $\tilde{T}(P, \omega)$ s'écrit

$$\tilde{T}(P, \omega) = \frac{1}{V_0} \iint_A G(P, M', \omega) e^{-\frac{j\omega x}{V_0}} d\zeta(M')$$

et

$$\tilde{T}_e(\omega) = \iint_A \tilde{T}(P, \omega) \varphi_e(P) d\zeta(P).$$

IV,3.3. Statistique des réponses à la turbulence.

Le processus local de turbulence étant considéré (IV,1.3.) comme un processus stationnaire et gaussien, la variance de la réponse $S_W(P, t)$ est égale à

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{2} \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_s(\omega) d\omega$$

et le nombre moyen $N_s(\gamma)$ de dépassements par seconde d'un niveau γ donné se calcule grâce aux formules de Rice [46 - Part III].

$$(IV,19) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_s(\gamma) = N_{0s} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{2\sigma_s^2}\right) \\ N_{0s} = \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \varphi_s(\omega) d\omega\right)^{1/2}}{2\pi \sigma_s \sqrt{2\pi}} \end{array} \right.$$

représente le nombre moyen d'annulations par seconde de $S_W(P, t)$.

IV,4. Optimisation de la réponse en vol longitudinal.

IV,4.1. Représentation de la structure en vol longitudinal.

Si la représentation modale tient compte des braquages $\beta(t)$ de la gouverne de profondeur, il est nécessaire d'adjoindre à l'ensemble $q_\ell(t)$ des coordonnées généralisées précédentes, les coordonnées généralisées $q'_k(t)$ représentant le braquage - ρ_ℓ désignant la réponse impulsionnelle due aux braquages, relative à q_ℓ ou à l'une de ses transformées linéaires, toute réponse locale $S_\beta(P, t)$ de la structure aux débattements de la gouverne s'exprime par

$$S_\beta(P, t) = \sum_{\ell} S_\ell(P) \left[(\rho_\ell * \beta)(t) \right]$$

comme en (IV,2.3) nous supposons que le schéma modal limité à un nombre fini de modes est représentatif du comportement de la structure aux braquages. Il vient :

$$(IV,20) \quad S_\beta(P, t) = \sum_{\ell=1}^R S_\ell(P) \left[(\rho_\ell * \beta)(t) \right].$$

Proposition.

La réponse locale de la structure, à la suite d'une excitation par la turbulence $W(t)$ et par les braquages de gouverne $\beta(t)$, s'exprime par la relation

$$(IV,21) \quad S(P, t) = \sum_{\ell=1}^R S_\ell(P) \left[(\lambda_\ell * W)(t) + (\rho_\ell * \beta)(t) \right]$$

et s'explicité sous la forme (II,1.)

$$(IV,22) \quad S(P, t) = (\mu_P * W)(t) + (\nu_P * \beta)(t)$$

où :

$$\begin{cases} \mu_P = \sum_{\ell} S_\ell(P) \lambda_\ell \text{ est la réponse impulsionnelle à la turbulence.} \\ \nu_P = \sum_{\ell} S_\ell(P) \rho_\ell \text{ la réponse impulsionnelle aux braquages.} \end{cases}$$

On a indiqué et justifié que, dans la représentation modale de la structure en vol rectiligne symétrique, les équations relatives au vol longitudinal (mouvements et déformations symétriques) et au vol transversal (mouvements et déformations antisymétriques) sont découplées. En particulier, en vol longitudinal les mouvements d'ensemble de la structure comprennent les translations verticales du centre d'inertie et le tangage. En vol latéral, ils comprennent le roulis, le lacet et le dérapage. Les relations (IV,21) et (IV,22) représentent ainsi, pour les valeurs de ℓ , telles que $\rho_\ell \neq 0$, les réponses locales correspondant au vol longitudinal. Nous les noterons sous la forme

$$(IV,23) \quad \begin{cases} S(P, t) = \sum_{h=1}^M S_h(P) \left[(\lambda_h * W)(t) + (\rho_h * \beta)(t) \right] & M < R \\ \text{soit} & \\ S(P, t) = (\mu_P * W)(t) + (\nu_P * \beta)(t) \end{cases}$$

où μ_P et $\nu_P \in \mathcal{X}$.

IV,4.2. Problème d'optimisation en vol longitudinal.

Pour limiter les dangers dus aux rafales, il est important de chercher à diminuer les effets de la turbulence sur les réponses de la structure.

D'après les résultats IV,4.1, le système en vol longitudinal se définit comme en (II,1). Si la turbulence est mesurée en vol, les méthodes générales d'optimisation développées précédemment sont applicables à une loi de pilotage de la forme

$$(IV,24) \quad \beta(t) = (\eta * W)(t)$$

dans laquelle l'inconnue est la distribution η de $\mathcal{Z}$. On réalise ainsi une commande n'altérant pas les qualités structurales du système, c'est à dire, ne modifiant pas les réponses impulsionnelles μ_P et ν_P . Si l'on optimise localement certaines réponses considérées comme dangereuses ou inacceptables il est clair que le problème peut être résolu par analogie avec les résultats établis dans les chapitres II et III. Nous nous proposons d'envisager un cas plus général qui consiste à réaliser une optimisation globale des réponses suivant une loi de

pondération donnée $g(P)$.

a) Position du problème.

Nous cherchons à minimiser l'expression

$$I = 2\pi \int_A \sigma_s^2(P) g(P) d\zeta(P)$$

dans laquelle $g(P) d\zeta(P)$ définit une mesure positive bornée sur l'aile. Lorsque cette mesure est une mesure de Dirac, on retrouve le cas particulier de l'optimisation locale.

Le choix de la loi de pilotage (IV,24) et les relations (IV,23) conduisent sans difficulté au calcul. Il vient :

$$(IV,25) \quad \mathcal{J}(K) = \sum_{h,k=1}^M \theta_{hk} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \tilde{\lambda}_h \tilde{\lambda}_k^* + 2 \operatorname{Re} \left[\tilde{\lambda}_h^* \tilde{\rho}_k \tilde{\eta} \right] + \tilde{\rho}_h \tilde{\rho}_k^* \left| \tilde{\eta} \right|^2 \right\} \varphi_w(\omega) d\omega$$

où l'on a posé :

$$\theta_{hk} = \iint_A s_h(P) s_k(P) g(P) d\zeta(P)$$

$$\tilde{\lambda}_h = (\mathcal{L} \lambda_h)(j\omega) \quad , \quad \tilde{\lambda}_h^* = (\mathcal{L} \lambda_h)(-j\omega)$$

de même

$$\tilde{\rho}_k = (\mathcal{L} \rho_k)(j\omega)$$

$$\tilde{\eta} = (\mathcal{L} \eta)(j\omega) = K(j\omega)$$

$$I = \mathcal{J}(K).$$

La fonctionnelle $\mathcal{J}$ à valeurs (IV,25) que nous voulons minimiser est définie sur $\mathcal{K}$ et semi définie positive.

Remarque fondamentale.

Le problème n'a évidemment de sens que si l'on s'intéresse aux systèmes stabilisés d'un point de vue aérodynamique. Cette condition signifie d'une part que $\tilde{\lambda}_h, \tilde{\rho}_h \in \mathcal{K}$ pour tout h (IV,2.3.), d'autre part que $\theta_{h,k} < \infty$. Considérons la fonction $Z(\omega)$ définie par :

$$Z(\omega) = \sum_{k=1}^M \sum_{h=1}^M \theta_{hk} \tilde{\rho}_h \tilde{\rho}_k^* = \sum_{h,k=1}^M \theta_{hk} \operatorname{Re} (\tilde{\rho}_h \tilde{\rho}_k^*) = \iint_A \left| \sum_{\ell} s_{\ell}(P) \tilde{\rho}_{\ell} \right|^2 g(P) d\zeta(P)$$

$Z(\omega)$ est une fonction réelle, continue, bornée. De plus $Z(\omega) \geq 0$ par définition. Il en résulte que la fonction $\varphi_Z(\omega) = Z(\omega) \varphi_w(\omega)$ représente sur $\mathcal{R}$ la densité d'une mesure positive bornée.

b) Valeurs de la fonctionnelle.

Considérons l'espace produit $\mathcal{K}^M$. A tout couple

$$H(\omega) = \{h_q(\omega)\}_{q=1\dots M} \quad , \quad G(\omega) = \{g_q(\omega)\}_{q=1\dots M}$$

de $\mathcal{K}^M$ on peut associer le produit scalaire

$$((H, G))_w = \sum_1^M \int_{-\infty}^{+\infty} h_q g_q^* \varphi_w(\omega) d\omega = \sum_1^M (h_q, g_q)_w.$$

Désignons par $\mathcal{C}$ l'opérateur linéaire borné tel que

$$H(\omega) = \{h_q\}_{q=1\dots M} \longrightarrow \mathcal{C}H(\omega) = \left\{ \sum_q \theta_{qk} h_q \right\}_{k=1\dots M}$$

$\mathcal{C}$ définit un endomorphisme de $\mathcal{K}^M$.

Si l'on considère sur $\mathcal{K}^M$ les éléments suivants :

$$A(\omega) = \{\tilde{\lambda}_h\}_{h=1\dots M} \text{ et son homologue } A'(\omega) = \mathcal{C}A(\omega).$$

$$BK(\omega) = \left\{ \tilde{\rho}_h \tilde{\eta} \right\}_{h=1 \dots M} \text{ et son homologue } B'K(\omega) = C(BK)(\omega)$$

la valeur de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ s'écrit :

$$(IV,26) \quad \mathcal{J}(K) = \langle\langle A', A \rangle\rangle_w + \langle\langle A', BK \rangle\rangle_w + \langle\langle BK, A' \rangle\rangle_w + \langle\langle B'K, BK \rangle\rangle_w$$

Il est trivial de vérifier que :

$$\langle\langle B'K, BK \rangle\rangle_w = \langle\langle BK, B'K \rangle\rangle_w = (K, K)_z.$$

c) Bilan des propriétés du problème.

Le problème satisfait aux propriétés fondamentales suivantes :

- $\mathcal{J}(K)$ est une fonctionnelle convexe;
- la mesure de densité $\varphi_z(\omega)$ est positive bornée (remarque a).

Nous n'insisterons pas sur la démonstration de la première propriété, elle résulte de la relation

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[\alpha K_1 + (1-\alpha) K_2] &= \alpha \mathcal{J}(K_1) + (1-\alpha) \mathcal{J}(K_2) - \alpha(1-\alpha) Q \\ Q &= (K_1 - K_2, K_1 - K_2)_z \geq 0. \end{aligned}$$

Alors les méthodes développées dans les chapitres II et III restent applicables. Nous allons indiquer rapidement comment s'y rapporter.

- Les résultats de la résolution approchée établis en II s'étendent au problème si l'on considère sur l'espace des suites $\mathcal{H}_N$

$$V_N = \{k_p\}_{p=0 \dots N-1}$$

$$F_N = \{k'_p\}_{p=0 \dots N-1} \quad \text{avec} \quad k'_p = 1/2 \left\{ \langle\langle A', Bf_p \rangle\rangle_w + \langle\langle Bf_p, A' \rangle\rangle_w \right\}$$

$$C_N V_N = \{h_p\} \quad h_p = 1/2 \sum_{q=0}^{N-1} k_q \left\{ \langle\langle B'f_p, Bf_q \rangle\rangle_w + \langle\langle Bf_q, B'f_p \rangle\rangle_w \right\}$$

et si l'on remarque que

$$\langle C_N V_N, V_N \rangle = (K_N, K_N)_z.$$

- D'autre part, $\delta K(\delta)$ étant un élément de $\mathcal{A}^*$, la condition extrémale (III, 2.1.) s'écrit :

$$\langle\langle A' + B'K, B\delta K \rangle\rangle_w + \langle\langle B\delta K, A' + B'K \rangle\rangle_w = 0.$$

Elle correspond à l'équation intégrale :

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty} G(\delta) \delta K(\delta) d\delta + \int_{-j\infty}^{+j\infty} G(-\delta) \delta K(-\delta) d\delta = 0$$

dans laquelle

$$G(-\delta) = \sum_{h,k=1}^M \theta_{hk} \left[\tilde{\lambda}_h(\delta) \tilde{\rho}_k(-\delta) + \tilde{\rho}_h(\delta) \tilde{\rho}_k(-\delta) K(\delta) \right] \varphi_e\left(\frac{\delta}{J}\right).$$

Les propriétés démontrées en III sont vérifiées.

On est amené à poser en particulier :

$$P(\delta) = \sum_{h,k=1}^M \theta_{hk} \tilde{\lambda}_h(\delta) \tilde{\rho}_k(-\delta)$$

$$Q(\delta) = \sum_{h,k=1}^M \theta_{hk} \tilde{\rho}_h(\delta) \tilde{\rho}_k(-\delta)$$

pour revenir à la relation (III,6) dans le cas rationnel. On définira ensuite F et V (III,10) à partir des expressions modifiées de F_N et V_N .

En faisant une synthèse des méthodes précédentes, il est donc possible de résoudre le problème général posé.

IV,4.3. Résolution.

Cette synthèse sera résumée par les points suivants :

a) Choix du modèle spectral.

Pour les structures que nous serons amenés à considérer et pour la gamme des valeurs de ω qui ont une signification physique relativement au problème d'optimisation, les modèles de turbulence indiqués sont des modèles « voisins ». Nous adopterons généralement le modèle de **Karman**, car sa forme est plus représentative des résultats expérimentaux.

b) Résolution dans $\mathcal{K}$.

Il existe toujours des solutions au problème sous la forme développée

$$(II,6) \quad K(j\omega) = \sum_p k_p f_p(\omega) .$$

Nous avons vu que les propriétés démontrées dans le chapitre II peuvent être appliquées au cas général. Il faut mentionner d'éventuelles difficultés quant à la rapidité de convergence du procédé.

c) Méthode générale de résolution.

Les fonctions $\tilde{\lambda}_h, \tilde{\rho}_h$ ($h = 1 \dots M$) calculées par résolution d'équations du type (IV,16) sont généralement de forme rationnelle. Alors $P(s)$ et $Q(s)$ sont des fractions rationnelles et il peut exister une solution optimale rationnelle, avec le modèle spectral de **Dryden** (IV,6). Les conclusions établies dans III s'étendent au problème et conduisent à chercher une solution développée

$$(III,16) \quad K(j\omega) = \sum_{z \in I} \alpha_z D_z(j\omega) + \sum_p \beta_p f_p(\omega) .$$

La forme simple de la loi optimale se représente facilement. Elle est intéressante pour le traitement du problème par la voie numérique et elle permet d'aborder les applications.



Chapitre V

APPLICATIONS

Etant donné l'intérêt que présente l'optimisation du vol d'un avion en turbulence, ce chapitre est développé dans un contexte numérique et plus technique.

Le début de l'exposé est consacré à la définition d'un « optimiseur » de rafales, dans le cas simple où la structure est supposée indéformable.

Les résultats obtenus confirment les considérations théoriques et la qualité de l'optimisation et il est important de les étendre au vol de l'avion souple. A cette fin, les éléments nécessaires à une résolution numérique sont précisés.

Comme la méthode est fondée sur la connaissance de la turbulence, on analysera les perturbations causées par des erreurs de mesures. On conclura par des remarques pratiques concernant l'utilisation et l'extension des solutions.

V. APPLICATIONS

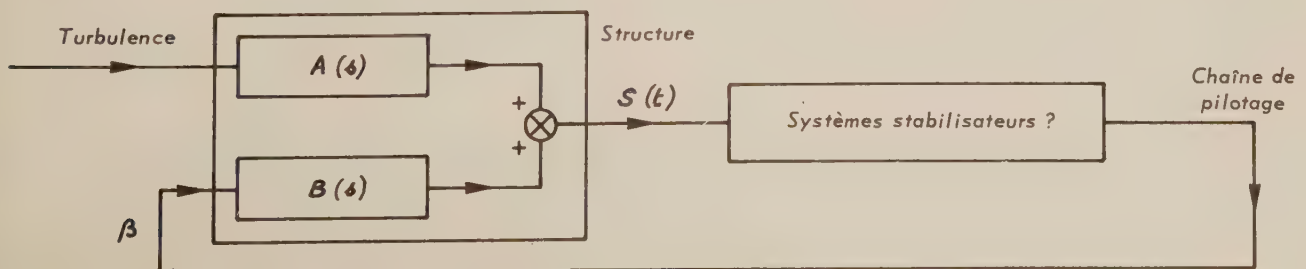
V.1. Position du problème.

Les accélérations induites sur un avion du fait de la turbulence atmosphérique qu'il rencontre peuvent s'avérer dangereuses pour la résistance de la structure et les qualités de vol et désagréables du point de vue du confort de l'équipage ou des passagers. Il est donc nécessaire, dans les cas où la turbulence ne peut être évitée, de réduire les inconvénients dus aux rafales en réalisant l'optimisation des vols en turbulence.

Bien qu'aucune théorie générale n'ait été dégagée en ce sens, on peut considérer deux manières d'aborder le problème. La première méthode opère en boucle fermée et conduit à définir des systèmes automatiques qui minimisent la réponse en modifiant les caractéristiques structurales de l'avion. La deuxième méthode se déduit de l'étude faite dans les chapitres précédents. Elle consiste à mesurer la turbulence et à élaborer à partir de cette mesure les ordres de gouvernes qui diminuent ses effets.

V.1.1. Analyse de la première méthode.

Sous la désignation de « gust Alleviation » ou « gust response control » les techniques les plus récentes utilisent la théorie du contrôle optimal linéaire [25] à [33]. La loi de pilotage est définie à partir des variables d'état. L'optimisation est réalisée généralement par l'intermédiaire des éleveurs, au moyen de systèmes stabilisateurs bouclés qui modifient les caractéristiques structurales de l'appareil, selon une configuration conforme au schéma suivant :



De tels systèmes ont une réalisation complexe et nécessitent une connaissance approfondie du comportement aérodynamique de la structure. Ils entraînent des études délicates de stabilité pour que les conditions de maniabilité soient conservées. En fait la méthode ne permet pas la détermination d'un modèle simple. Elle s'avère cependant efficace dans le domaine des modes de déformation qui, relativement à la représentation modale (IV,8) correspondent aux formes propres de rang supérieur à 6. En effet, dans ce domaine, il peut être intéressant de modifier les fonctions de transfert, car la réponse de la structure n'est pas en général optimisée du point de vue aéroélastique.

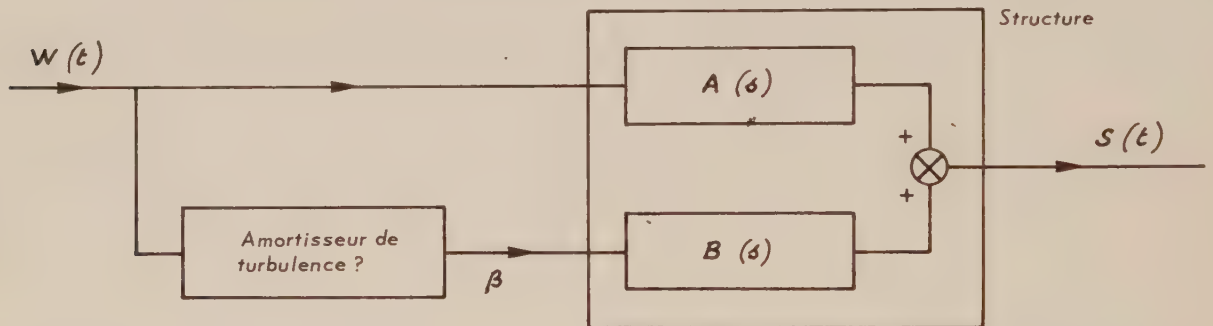
V,1.2. Analyse de la deuxième méthode.

Par contre, si l'on considère le domaine de la mécanique du vol (correspondant (IV,8) aux formes propres de déplacement) on ne peut plus se permettre de modifications pour des raisons de manœuvre ou de stabilité. Pour ne pas modifier les caractéristiques aérodynamiques des appareils que les constructeurs ont été amenés à optimiser par le choix des pilotes automatiques usuels, il est nécessaire d'aborder le problème d'optimisation sous la forme d'un problème de pilotage en boucle ouverte. Cette motivation reporte aux hypothèses développées dans (IV,4.2) ou (II,1.1). Si l'on s'intéresse aux mouvements symétriques de la structure, les réponses locales (IV,23) et la commande s'écrivent

$$(V,1) \quad \begin{cases} S(P,t) = (\mu_p * W)(t) + (\nu_p * \beta)(t) \\ \beta(t) = (\eta_p * W)(t) \end{cases}$$

la résolution se rapporte à (IV,4.3.).

L'optimisation est ainsi réalisée en commandant la gouverne par un « amortisseur de turbulence » excité par la turbulence mesurée à chaque instant, dont la configuration est traduite par le schéma suivant :



Cette méthode nécessitant la connaissance de la turbulence, il est indispensable de rappeler le principe de sa mesure en vol.

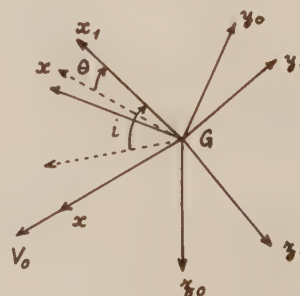
V,1.3. Principe de la détermination de $W(t)$.

Le calcul de $W(t)$ résulte de considérations cinématiques. Pour les préciser il est nécessaire de revenir aux notions [9] de mécanique du vol - si l'on considère les trois trièdres habituels :

$$\begin{cases} G x_0 y_0 z_0 & \text{référentiel} \\ G x_1 y_1 z_1 & \text{lié à l'avion} \\ G x y z & \text{trièdre aérodynamique} \end{cases}$$

on est amené à définir les angles d'Euler de la mécanique du vol, et pour le mouvement longitudinal en particulier :

$$\begin{cases} \text{l'angle d'incidence } i \\ \text{l'assiette longitudinale } \theta \end{cases}$$



Un calcul élémentaire entraîne, sous l'hypothèse des petits mouvements, la relation cinématique :

$$(V,2) \quad i = \theta - \frac{\dot{z}}{V_0} + \frac{W}{V_0}$$

dans laquelle :

$$\begin{cases} z & \text{désigne l'altitude } \dot{z} = \frac{dz}{dt}, \\ W & \text{la composante verticale de la turbulence,} \\ V_0 & \text{la vitesse de l'avion en régime permanent.} \end{cases}$$

Pratiquement $\dot{\theta}$, $\dot{z}$ et i , peuvent être mesurés en vol et (V,2.) conduit au calcul, ou à la restitution de $W(t)$.

V,2. Avion rigide - Recherche d'une loi optimale et analyse d'un dispositif amortisseur de turbulence.

La première application est relativement simple et limitée au domaine de la mécanique du vol dans lequel la structure est schématisée par l'avion rigide. On s'intéresse à l'optimisation des accélérations le long de l'axe longitudinal de l'avion.

V,2.1. Equations de la mécanique du vol.

En vol longitudinal les équations du mouvement s'écrivent, en supposant rigides les commandes de gouverne

$$(V,3) \quad \begin{cases} m \ddot{z} - \rho/2 S V^2 (C_{z,i} i + C_{z,\beta} \beta) = 0 \\ I \ddot{\theta} + \rho/2 S \ell V^2 (C_{m,i} i + C_{m,\beta} \beta) + \rho/2 S \ell V^2 C_{m,q} \dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On leur adjoint la relation cinématique

$$i = \theta - \frac{\dot{z}}{V} + \frac{W}{V}.$$

En utilisant des paramètres réduits (notations: Annexe I.A) on est ramené au système linéaire suivant :

$$(V,4) \quad \begin{cases} a \ddot{z} + \frac{\dot{z}}{V} - \theta = \frac{W}{V} + b \beta \\ c \ddot{\theta} + \theta - \frac{\dot{z}}{V} + \frac{n}{V} \dot{\theta} = -\frac{W}{V} - p \beta \end{cases}$$

L'expression des fonctions de transfert, s'en déduit par calcul des transformées de **Laplace**. En tout point d'abscisse d , les fonctions de transfert des accélérations s'écrivent :

$$(V,5) \quad \begin{cases} A_d(s) = \frac{(c-ad)s^2 + s \frac{n}{V}}{sc[s^2 + 2\alpha\omega_0 s + \omega_0^2]} & \text{relativement à } \frac{W}{V} \\ B_d(s) = \frac{s^2 [(b-p)c + p(c-ad)] + s [(b-p)(\frac{n}{V} + \frac{d}{V}) + p \frac{n}{V}] + (b-p)}{sc[s^2 + 2\alpha\omega_0 s + \omega_0^2]} & \text{relativement à } \beta \end{cases}$$

V,2.2. Etude numérique générale.

La réponse d'un paramètre $S(t)$ étant mise sous la forme :

$$\begin{cases} S(t) = \left(\mu * \frac{W}{V} \right)(t) + (\nu * \beta)(t) \\ \beta(t) = \left(\eta * \frac{W}{V} \right)(t) \end{cases}$$

les fonctions de transfert des accélérations sont les fractions rationnelles (V,5.).

Résoudre le problème de l'optimisation des accélérations revient à déterminer $K_d(j\omega)$ de manière que la variance

$$\sigma_d^2(K) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{J}_d(K); \quad \mathcal{J}_d(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |A_d(j\omega)|^2 + 2 \operatorname{Re} [A_d^*(j\omega) B_d(j\omega) K(j\omega)] + |B_d(j\omega) K(j\omega)|^2 \right\} \varphi_W(\omega) d\omega$$

soit minimale

$$\mathcal{J}_d^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |A_d(j\omega)|^2 \varphi_W(\omega) d\omega \text{ correspond à } \eta = 0$$

Pour reprendre les conclusions de l'étude théorique, nous étudierons le profil de l'optimisation le long de l'axe longitudinal, avec chacune des méthodes suivantes

- | | |
|---|-----------|
| a) solutions de forme $K(j\omega) = \sum_p k_p f_p(\omega)$ | (II,6.) |
| b) recherche de la solution exacte | (III,7.) |
| c) loi optimale approchée | (III,16.) |

Les constantes aérodynamiques qui figurent dans les calculs sont celles de «l'avion à stabilité variable», déterminées dans les conditions de vol 1000', Mach 0,8, remplissage 1500 l

a) solutions de forme (II,6.) $K(j\omega) = \sum_p k_p f_p(\omega) = \sum_p k_p \left(\frac{1-j\omega}{1+j\omega} \right)^p$

Le calcul est réalisé pour le modèle spectral de **Karman**

$$\varphi_w(\omega) = \sigma_w^2 L \cdot \frac{1 + 8/3 \left(1,339 \frac{\omega L}{V} \right)^2}{\left[1 + \left(1,339 \frac{\omega L}{V} \right)^2 \right]^{11/6}}$$

avec un développement en série de fonctions de **Laguerre** tel que :

(V,6) $K(j\omega) = K_0 + \sum_1^N K_n \ell_n(\omega) = K_0 + \sum_1^N K_n \frac{(1-j\omega)^{n-1}}{(1+j\omega)^n}$

équivalent à (II,6.) au rang fini.

Les résultats traduisant l'évolution des gains $\frac{J_d^0}{J_d}$, en fonction de l'abscisse pour un coefficient d'échelle fixé $L = 216$ m sont portés dans le tableau I-B.

Dans l'expression du gain $J_d = J_d(K_d)$ représente la valeur optimale au point d'abscisse d .

b) solutions optimales exactes.

Il existe, vers l'avant de l'avion, une plage de solutions triviales $K_d(s) = -\frac{A_d(s)}{B_d(s)}$, $s = j\omega$,

indépendantes de la turbulence sur laquelle chacun des points peut devenir centre instantané de rotation par annulation de la variance correspondante.

Pour le cas non trivial, l'expression (III,7.) dans laquelle $\varphi_e(s)$ est remplacé par le modèle spectral de **Dryden**

$$\varphi_w(s) = \sigma_w^2 L \cdot \frac{1 - 3 \frac{s^2 L^2}{V^2}}{\left(1 - \frac{s^2 L^2}{V^2} \right)^2}$$

se développe suivant

(V,7) $K_m(s) = A_0 + \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \frac{A_3}{s + W_1}$

où $\begin{cases} s_1, s_2 & \text{sont racines de } B_d^+(s) B_d^+(-s) \\ W_1 = \frac{V}{L\sqrt{3}} & \text{est racine de } \varphi_w(s) \end{cases}$

Les gains obtenus sont portés dans le tableau I-C.

Remarques :

En regard des résultats (voir aussi courbe I-E) une interprétation s'impose notamment dans le domaine des solutions triviales.

Les termes de forme :

$$\frac{1}{s + s_0} \quad (s_0 > 0), \quad \frac{1}{s^2 + 2\alpha\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{s}{s^2 + 2\alpha\omega_0 s + \omega_0^2}$$

(dont l'étude est analogue) qui apparaissent dans l'expression de la solution exacte, se développent selon :

$$\left| \begin{aligned} \frac{1}{s + s_0} &= \frac{1}{1 + s_0} + \frac{2}{(1 + s_0)^2} \left(\frac{1-s}{1+s} \right) \left[\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{s_0-1}{s_0+1} \right)^p \left(\frac{1-s}{1+s} \right)^p \right] \\ \frac{1}{s^2 + 2\alpha\omega_0 s + \omega_0^2} &= \frac{\omega_0^2}{2(1+\alpha)} + \sum_{p=1}^{\infty} \omega_0^2 (-1)^{p+1} \frac{\alpha(1-\alpha)^{p-1}}{(1+\alpha)^{p+1}} \left(\frac{1 - \frac{s}{\omega_0}}{1 + \frac{s}{\omega_0}} \right)^{2p} \\ &+ \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(1-\alpha)^p}{(1+\alpha)^{p+1}} \left(\frac{1 - \frac{s}{\omega_0}}{1 + \frac{s}{\omega_0}} \right)^{2p+1} \end{aligned} \right.$$

Les coefficients de ces séries sont les termes de progressions géométriques de raisons respectives $\frac{s_0-1}{s_0+1}$ et $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$.

Sur la plage de solutions triviales, on a pu vérifier que ces raisons sont voisines de 1. Cette remarque justifie la convergence lente constatée dans les développements (V,6.) et les incompatibilités des résultats a, b.

c) loi optimale approchée de forme (III,16).

La loi approchée (III,16.) :

$$K(j\omega) = \sum_{z \in I} \alpha_z D_z(j\omega) + \sum_p \beta_p f_p(\omega) \quad \sum_p |\beta_p| < \infty$$

permet d'atteindre les solutions triviales (pour lesquelles $\beta_p = 0, \forall p$).

Pour les autres points, elle s'explicite sous la forme

$$(V,8) \quad K_d(j\omega) = c_0 + \frac{c_1}{j\omega - s_1} + \frac{c_2}{j\omega - s_2} + \sum_{n=1}^N A_n \ell_n(\omega)$$

les constantes optimales sont solutions d'un système d'équations linéaires (III,9.).

Les gains obtenus pour le modèle spectral de **Karman**, sont portés dans le tableau I-D.

Conclusion.

Compte tenu des gains théoriques obtenus en b) l'étude comparée des lois (courbes I-E) conduit aux mêmes conclusions que l'étude théorique du chapitre III et montre l'intérêt de la forme optimale approchée.

V,2.3. Définition de la loi de pilotage optimal.

Connaissant, sur l'espace $\mathcal{X}$, le modèle de la loi de pilotage, nous pouvons analyser la meilleure configuration de la commande optimale.

Pour l'appareil considéré, les deux points intéressant principalement l'optimisation, sont le centre de gravité et le poste pilote. Les contraintes toujours difficiles à préciser, ne figurent pas explicitement dans les calculs. Nous conviendrons alors de retenir toute solution

- qui n'entraîne pas de perturbations inacceptables des autres paramètres,
- qui est peu sensible à des variations de paramètres mal connus tels l'échelle de turbulence et reste efficace lorsque les coefficients aérodynamiques évoluent.

a) au poste pilote P la solution est une solution triviale qui annule la variance de l'accélération

$$K_P(j\omega) = \frac{623 \omega^2 - 907 j\omega}{-\omega^2 + 3,12 j\omega + 227}.$$

Cette solution ne peut être retenue car elle pénalise la vitesse de tangage (σ_{θ}^2 est multiplié par 70) et les réponses des points arrière de l'avion (courbes I-F).

b) au c. d. g. G, la loi optimale (V,8.) déterminée sans termes complémentaires, pour un coefficient d'échelle

$L = 216 \text{ m}$, est égale à :

$$(V,9) \quad K_a(j\omega) = -1,49 - \frac{534}{j\omega + 16,38} + \frac{597}{j\omega + 17,48}.$$

Elle réduit la variance de l'accélération dans un rapport de l'ordre de 2,19, sans pénaliser les réponses des différents points de l'axe (courbe I-G). De plus les gains et les coefficients optimaux restent stationnaires lorsque l'échelle de turbulence varie (courbe I-H) ou lorsque les coefficients aérodynamiques évoluent (I-K).

Conclusion.

On peut finalement admettre le principe d'une optimisation moyenne et proposer pour l'avion, dans les conditions considérées, la commande

$$(V,10) \quad \beta(t) = \left[-1,49 \delta(t) - 534 e^{-16,38 t} + 597 e^{-17,48 t} \right] * \frac{W(t)}{V}$$

pour laquelle $\beta(t)$ exprime en radians l'angle de braquage de gouverne. Son introduction dans la chaîne de pilotage réduit de :

- 55 % la variance de l'accélération en G ,
- 42 % la variance de l'accélération au poste pilote,
- 72 % la variance de la vitesse de tangage,
- 75 % le nombre de dépassements (IV,19.) de deux fois l'écart type;

ces résultats correspondent à une amélioration intéressante de la résistance à la fatigue de la structure. Ils peuvent être illustrés par les courbes I-L.

V.2.4. Principe de la représentation analogique et vérifications expérimentales.

Les solutions précédentes sont des éléments de $\mathcal{Z}^o$, réalisables de manière simple. Etudions (V,6.) par exemple - $L_n(t)$ désignant les fonctions de **Laguerre**, les fonctions :

$$u_n(t) = \left(L_n * \frac{W}{V} \right) (t)$$

vérifient le système d'équations différentielles récurrentes

$$(V,11) \quad \begin{cases} u_0 + \dot{u}_0 = \frac{W}{V} \\ u_n + \dot{u}_n = u_{n-1} - \dot{u}_{n-1} \end{cases}$$

Le schéma analogique formé de blocs récurrents (I-M) s'en déduit de manière élémentaire.

Vérifications expérimentales.

Des essais sur réseau analogique simulant la mécanique du vol de l'avion et le dispositif amortisseur de turbulence (V,9.) ont été effectués à partir d'enregistrements de turbulence réelle (I-N).

Ils ont permis de vérifier :

- d'une part la validité des hypothèses (IV,1.3.),
- d'autre part les résultats de l'étude numérique.

Ils confirment ainsi les prévisions théoriques faites à partir d'un modèle de turbulence stationnaire et Gaussien - malgré quelques difficultés technologiques, les résultats des premiers essais en vol, permettent d'avoir un grand espoir dans le succès de la méthode.

V.3. Optimisation de la réponse de l'avion souple.

Si l'étude précédente est une application simple des développements théoriques, nécessaire d'une part pour vérifier les hypothèses, d'autre part pour la compréhension pratique du problème il est bien évident que l'objectif principal reste l'optimisation de l'avion souple en turbulence. On a vu dans le chapitre IV comment le problème se pose théoriquement. Notre but est de montrer maintenant comment ces méthodes sont exploitables par la voie numérique.

V,3.1. Equations données en vol longitudinal.

Pour l'avion souple considéré en exemple il a été montré que les sept premiers modes sont représentatifs du comportement de la structure. Les deux modes rigides sont représentés par les variables z (altitude du c. d. g.) et θ (assiette longitudinale), et les modes symétriques qui constituent les modes souples, par les coordonnées généralisées ζ_i , que nous noterons globalement ζ . Les forces aérodynamiques généralisées $(C_{k\ell} * q_k)(t)$ étant approximées par les polynômes

$$\alpha_{k\ell} q_k(t) + \beta_{k\ell} \dot{q}_k(t) + \gamma_{k\ell} \ddot{q}_k(t)$$

le système d'équations définissant la réponse à la turbulence W et au braquage de gouvernes β est donné matriciellement par

$$(V,12) \quad [Z_1] \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix} + [Z_2] \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} + [Z_3] \begin{bmatrix} z \\ \theta \\ \zeta \end{bmatrix} + [F_1] \ddot{\beta} + [F_2] \dot{\beta} + [F_3] \beta + [R] \frac{W(t)}{V} = 0.$$

Les matrices Z_1, Z_2, Z_3 sont les matrices des coefficients quasistationnaires résultant de l'approximation, les matrices F_1, F_2, F_3 correspondent au braquage de gouverne, les matrices R représentent les forces de rafales avec pénétration. Leurs transformées de Fourier sont connues pour différentes valeurs de ω . Des points de calcul (tels que le poste pilote P , le c. d. g. G , le point arrière du fuselage AR l'extrémité de la voilure EV) sont définis par une matrice KI à partir de laquelle on écrit la matrice des accélérations locales

$$(V,13) \quad [\ddot{X}_{loc}] = [KI] \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix}$$

V,3.2. Principes de l'optimisation.

La commande optimale (III,16) est la somme d'une fraction rationnelle de pôles connus $\sum_{\alpha \in I} \alpha_z D_z(j\omega)$ que nous appellerons « base de loi » et du reste $\sum_p \beta_p f_p(\omega)$.

— La première difficulté est due au calcul des pôles. Il nécessite la détermination explicite du numérateur de la fonction de transfert, relativement à β . Pensant à l'intérêt pratique que présente la loi la plus simple, on a écarté cette difficulté en effectuant le calcul à partir de deux des équations choisies comme étant les plus représentatives pour l'optimisation. Le numérateur de la fonction de transfert est alors un polynôme de degré 4 au plus. Le reste devient un terme correctif dû : d'une part au choix du modèle de turbulence, d'autre part à l'introduction des modes souples dans l'optimisation.

La solution de forme générale

$$(V,14) \quad K(j\omega) = \sum_n A_n g_n(\omega)$$

s'explicite généralement ainsi :

$$(V,14) \quad K(j\omega) = k + \sum_{j \leq 4} \frac{h_j}{j\omega + |s_j|} + \sum_{i \leq 2} \frac{k_i j\omega + k'_i}{-\omega^2 + 2j\omega |T_i| + (T_i^2 + V_i^2)} + \sum_1^n \gamma_n \ell_n(\omega)$$

s_j et $T_i + j V_i$ sont les racines de la fonction de transfert précédente,

$k_i, h_j, \dots, \gamma_n$ sont les constantes optimales.

— La deuxième difficulté vient du fait qu'aucun critère n'est donné quant au choix des paramètres ou de la forme des lois à optimiser. En l'absence de précisions intéressantes il a été prévu d'optimiser les accélérations ou les vitesses des réponses.

V,3.3. Organisation générale du calcul.

A partir des remarques précédentes la résolution numérique (annexe II - 1 - 2) s'organise selon un programme comprenant :

- lissage des forces de rafales,
- calcul des fonctions de transfert $A(s)$ et $B(s)$,
- choix du modèle spectral de turbulence,
- détermination des pôles de la base de loi,
- calcul des fonctions $g_n(\omega)$,
- détermination des constantes optimales A_n par résolution d'un système d'équations linéaire du type (III,9),
- calcul des variances et gains correspondants,
- étude de l'influence d'une loi optimale donnée sur un paramètre quelconque de l'avion.

Le même programme permet d'envisager l'introduction de stabilisateurs et de servomécanismes dans la représentation de la structure.

V.3.4. Conclusion.

Pour l'avion considéré si l'on s'intéresse par exemple à la minimisation de l'accélération au c.d.g. il apparaît des gains intéressants avec la base de loi définie par les équations 1 et 4 (Annexe II - 2). On peut, dans les conditions actuelles du calcul, indiquer la solution

$$K_g(j\omega) = -1,37 + \frac{337j\omega - 6528}{-\omega^2 + 18,48j\omega + 1666} + \frac{-245j\omega + 6015}{-\omega^2 + 13,34j\omega + 1488} \\ + \frac{5,85}{1+j\omega} - 4,61 \frac{(1-j\omega)}{(1+j\omega)^2} + 3,03 \frac{(1-j\omega)^2}{(1+j\omega)^3} - 1,72 \frac{(1-j\omega)^3}{(1+j\omega)^4}$$

qui réduit de 58 % la variance de l'accélération en G - 53 % la variance de l'accélération en P .

V.4. Défauts de gains dus à une erreur dans la restitution de $W(t)$.

Revenant aux fondements de la méthode, nous avons indiqué qu'elle est basée sur la connaissance de la turbulence - comme la mesure de $W(t)$ est faite à partir des réponses de l'avion, il peut être difficile de réaliser techniquement les conditions de la relation (V,2) - cette remarque conduit à étudier les pénalisations dues à une restitution imparfaite de $W(t)$.

V.4.1. Position du problème.

Désignons par η_m la commande optimale théorique calculée par l'une des méthodes précédentes. Nous pouvons décrire (V,1.) le système général commandé, avec les équations suivantes

$$(V,15) \quad \begin{cases} \text{état} & S(t) = (\mu * W)(t) + (\nu * p)(t) \\ \text{commande} & \beta(t) = (\eta_m * W')(t) \\ \text{mesure} & W'(t) = W(t) + \varepsilon(t) \end{cases}$$

$\varepsilon(t)$ représente une perturbation aléatoire due à la détermination de $W(t)$ à partir de la relation (V,2.). Nous la supposons stationnaire du second ordre.

Le problème consiste à caractériser la mesure de manière à déterminer une marge d'erreur acceptable pour l'optimisation.

V.4.2. Variance du système.

La réponse du système commandé s'écrit

$$S(t) = [(\mu + \nu * \eta_m) * W](t) + (\nu * \eta_m * \varepsilon)(t)$$

et définit un processus aléatoire dont on peut calculer la densité spectrale $\varphi_s(\omega)$. Il vient :

$$\varphi_s(\omega) = |A(j\omega) + B K_m(j\omega)|^2 \varphi_w(\omega) + 2 \operatorname{Re} [A^*(j\omega) B(j\omega) K_m(j\omega) \varphi_{w,\varepsilon}(\omega)] \\ + |B(j\omega) K_m(j\omega)|^2 [\varphi_{w,\varepsilon}(\omega) + \varphi_{\varepsilon,w}(\omega) + \varphi_\varepsilon(\omega)]$$

$A(s)$, $B(s)$, $K_m(s)$ sont les fonctions de transfert respectives de μ , ν , η_m ;

$\varphi_w(\omega)$ la densité spectrale de $W(t)$;

$\varphi_\varepsilon(\omega)$ la densité spectrale de $\varepsilon(t)$;

$\varphi_{w,\varepsilon}(\omega) = \varphi_{\varepsilon,w}^*(\omega)$ la densité spectrale croisée de $W(t)$ et de $\varepsilon(t)$.

Alors

$$(V,16) \quad \sigma_s^2 = \sigma_{s,m}^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 2 R_e \left[A^* B K_m \varphi_{W,\varepsilon} \right] + |B K_m|^2 \left[\varphi_{W,\varepsilon} + \varphi_{\varepsilon,W} + \varphi_{\varepsilon} \right] \right\} d\omega$$

$$\sigma_{s,m}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |A + B K_m|^2 \varphi_W(\omega) d\omega$$

représente la variance optimale théorique, la variance du système non commandé étant :

$$\sigma_{s,0}^2 = \frac{J^0}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |A(j\omega)|^2 \varphi_W(\omega) d\omega.$$

Pour traiter le problème, il convient de préciser la nature de la perturbation.

V,4.3. Perturbation non corrélée avec

Dans le cas simple où $\varphi_{W,\varepsilon} = 0$, (V,16.) entraîne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_s^2 = \sigma_{s,m}^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |B(j\omega) K_m(j\omega)|^2 \varphi_{\varepsilon}(\omega) d\omega \\ \text{avec} \quad \varphi_{\varepsilon}(\omega) = \varphi_{W'}(\omega) - \varphi_W(\omega). \end{array} \right.$$

La mesure spectrale φ_{ε} de densité $\varphi_{\varepsilon}(\omega)$ étant une mesure positive bornée et $|B(j\omega) K_m(j\omega)|^2$ une fonction continue bornée il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |B K_m|^2 \varphi_{\varepsilon}(\omega) d\omega \leq \sup_{\omega \in R} |B K_m(j\omega)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\varepsilon}(\omega) d\omega \quad \text{d'où}$$

$$(V,17) \quad \sigma_{s,m}^2 \leq \sigma_s^2 \leq \sigma_{s,m}^2 + M \cdot I$$

$$\left| \begin{array}{l} M = \sup_{\omega \in R} |B(j\omega) K_m(j\omega)|^2 \\ I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_{\varepsilon}(\omega) d\omega = \sigma_{W'}^2 - \sigma_W^2 \end{array} \right.$$

I est une grandeur accessible car $\sigma_{W'}^2$ est mesurable et σ_W^2 calculable à partir d'un modèle spectral théorique.

$$I \leq \frac{\alpha (\sigma_{s,0}^2 - \sigma_{s,m}^2)}{M} \left\} \Rightarrow \sigma_s^2 \leq \alpha \sigma_{s,0}^2 + (1-\alpha) \sigma_{s,m}^2$$

la valeur de α , pour $\alpha \in [0,1]$ caractérise l'erreur sur l'intervalle $[\sigma_{s,0}^2, \sigma_{s,m}^2]$. Elle fixe la limite de validité de la solution η_m .

V,4.4. Perturbation corrélée avec $W(t)$.

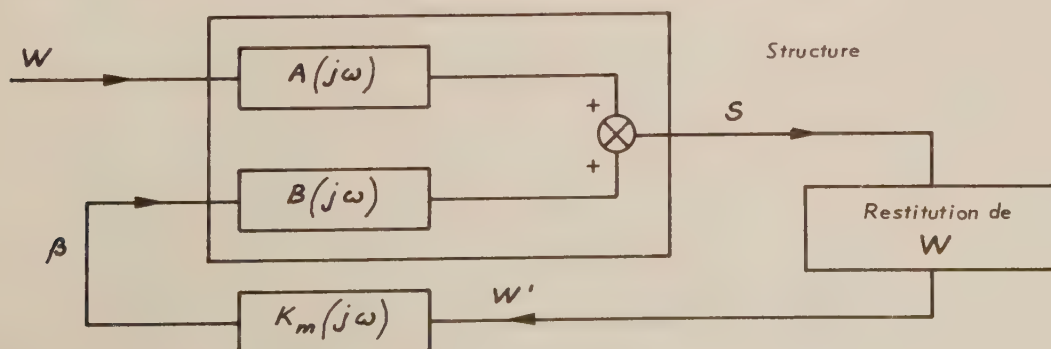
Il est certain que le cas le plus important, et sans doute pratiquement, le cas limite, est celui pour lequel une mauvaise restitution de $W(t)$ comporte un bouclage sur la variable d'état $S(t)$. La perturbation s'écrit alors sous la forme :

$$(V,18) \quad \varepsilon(t) = (\lambda * S)(t) \quad \text{où } \lambda \in \mathcal{C} \text{ est inconnue}$$

et

$$\beta(t) = (\eta_m * W)(t) + (\eta_m * \lambda * S)(t).$$

La configuration est relative au schéma suivant :



Les caractéristiques structurales de l'appareil sont modifiées, la réponse s'exprimant par :

$$\left[(\delta - \nu * \eta_m * \lambda) * S \right] (t) = \left[(\mu + \nu * \eta_m) * W \right] (t).$$

Les densités spectrales vérifient la relation

$$(V,19) \quad \left| 1 - B(j\omega) K_m(j\omega) C(j\omega) \right|^2 \varphi_s(\omega) = \left| A(j\omega) + B(j\omega) K_m(j\omega) \right|^2 \varphi_w(\omega) \\ C(j\omega) = (F\lambda)(\omega).$$

Deux cas se présentent :

a) des instabilités apparaissent en liaison avec la nature des pôles de $1 - B(s) K_m(s) C(s)$. Cette éventualité rend compte du danger qu'entraîne une détérioration de la méthode de mesure et pose le problème de la qualité de la restitution sur le plan technologique;

b) la stabilité de la structure est vérifiée. Alors $C(j\omega)$ est déterminée par la relation

$$C(j\omega) = \frac{\varphi_{W:W,S}(\omega)}{\varphi_s(\omega)}.$$

Posant

$$M = \sup_{\omega \in R} \left| 1 - B K_m C \right|^2, \quad m = \inf_{\omega \in R} \left| 1 - B K_m C \right|^2$$

il vient

$$(V,20) \quad \frac{\sigma_{s,m}^2}{M} \leq \sigma_s^2 \leq \frac{\sigma_{s,m}^2}{m}$$

(V,20) définit l'erreur. Le bouclage peut augmenter la qualité de l'optimisation. Cette propriété suggère une éventuelle amélioration du système proposé dans le cas où une modification de la fonction de transfert peut être admise.

V,5. Conclusion.

Au delà des difficultés d'ordre technologique que peut présenter l'application des résultats et des modifications qui pourraient en découler, nous nous sommes attachés à mettre en œuvre une méthode générale d'optimisation. Les applications développées numériquement dans ce chapitre soulignent comment la méthode proposée s'applique à toute structure rapportée à la forme (II,1) et conduit à une solution facilement représentable.

Revenant au problème du vol en turbulence, il est clair, si l'on s'intéresse aux mouvements antisymétriques de la structure, que la méthode peut être étendue à l'optimisation du vol latéral.

Pour l'optimisation en vol longitudinal, les arguments exposés suggèrent une solution intéressante dans un couplage des deux méthodes générales indiquées, la première méthode (V,1.1.) étant limitée au domaine des modes de déformation de la structure et la méthode (V,1.2.) fondée sur la mesure de la turbulence, au domaine de la mécanique du vol. Il peut y avoir intérêt, dans ce cas, à envisager une extension de la solution, au principe d'une commande adaptative, tenant compte à la fois des variations des conditions de vol de la structure et des erreurs techniques de réalisation.

ANNEXE I

ÉTUDE DE L'AVION RIGIDE

A - ÉQUATIONS DU MOUVEMENT - NOTATIONS

- z : déplacement vertical du centre de gravité,
 θ : assiette longitudinale,
 i : incidence de vol,
 m : masse de l'avion,
 I : inertie de rotation de l'avion en tangage,
 ρ : masse volumique de l'air,
 S : surface de référence de la voilure,
 V : vitesse de l'avion,
 ℓ : longueur de référence de la voilure,

$$C_{z,i} : \text{coefficient sans dimension de portance} = \frac{\partial C_z}{\partial i},$$

$$C_{m,i} : \text{coefficient sans dimension de moment} = \frac{\partial C_m}{\partial i},$$

$$C_{m,q} : \text{coefficient de dissipation de tangage} = \frac{\partial C_m}{\partial \dot{\theta}},$$

$$C_{z,\beta} : \text{coefficient de portance dû à l'élévation} = \frac{\partial C_z}{\partial \beta},$$

$$C_{m,\beta} : \text{coefficient de moment} = \frac{\partial C_m}{\partial \beta},$$

$$a = \frac{m}{\rho/2 S V^2 C_{z,i}},$$

$$c = \frac{I}{\rho/2 S \ell V^2 C_{m,i}},$$

$$b = \frac{C_{z,\beta}}{C_{z,i}},$$

$$n = \ell \frac{C_{m,q}}{C_{m,i}},$$

$$p = \frac{C_{m,\beta}}{C_{m,i}},$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{c} + \frac{n}{a c V^2}} \text{ pulsation réduite de tangage,}$$

$$\alpha = \frac{1}{2 \omega_o} \left[\frac{n}{c V} + \frac{1}{a V} \right] \text{ amortisseur réduit de tangage.}$$

B - LOI (V,6) - ÉVOLUTION DES GAINS EN FONCTION DE L'ABSCISSE

NOMBRE DE TERMES de la loi		ABSCISSES DES POINTS													
		4,77	4,50	4	3,50	3	2,50	2,10	1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4,77
gains $\frac{J_d^0}{J_d}$	1	1,21	1,224	1,252	1,28	1,310	1,341	1,367	1,47	1,519	1,599	1,686	1,778	1,874	1,953
	2	1,242	1,260	1,295	1,333	1,373	1,415	1,451	1,566	1,661	1,775	1,899	2,032	2,174	2,289
	3	1,248	1,268	1,308	1,350	1,395	1,443	1,484	1,610	1,727	1,861	2,007	2,164	2,333	2,472
	4	1,249	1,269	1,308	1,350	1,396	1,445	1,487	1,611	1,740	1,880	2,033	2,198	2,377	2,523

Le nombre maximum N de termes de la loi a été fixé à 4 à la suite d'une étude numérique de la convergence et pour des raisons d'ordre pratique.

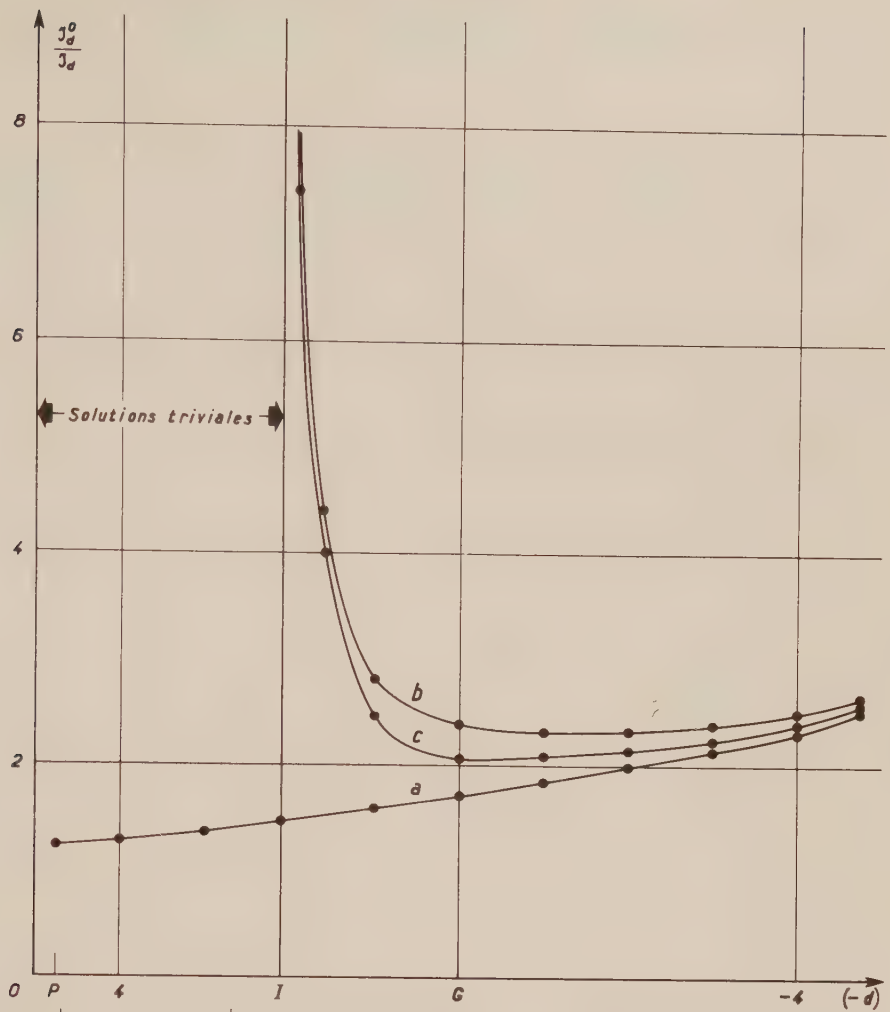
C - SOLUTION (III,7)

distances m		2,10	2	1	0	- 1	- 2	- 3	- 4	- 4,77
gains correspondants $\frac{J_d^0}{J_d}$		181	11,27	2,84	2,40	2,32	2,35	2,44	2,56	2,67
pôles	- s_1	157	65,18	23,37	17,48	14,69	12,97	11,79	10,90	10,36
	- s_2	410	84,7	23,29	16,38	13,22	11,32	10,02	9,067	8,477
	W_1	0,724								

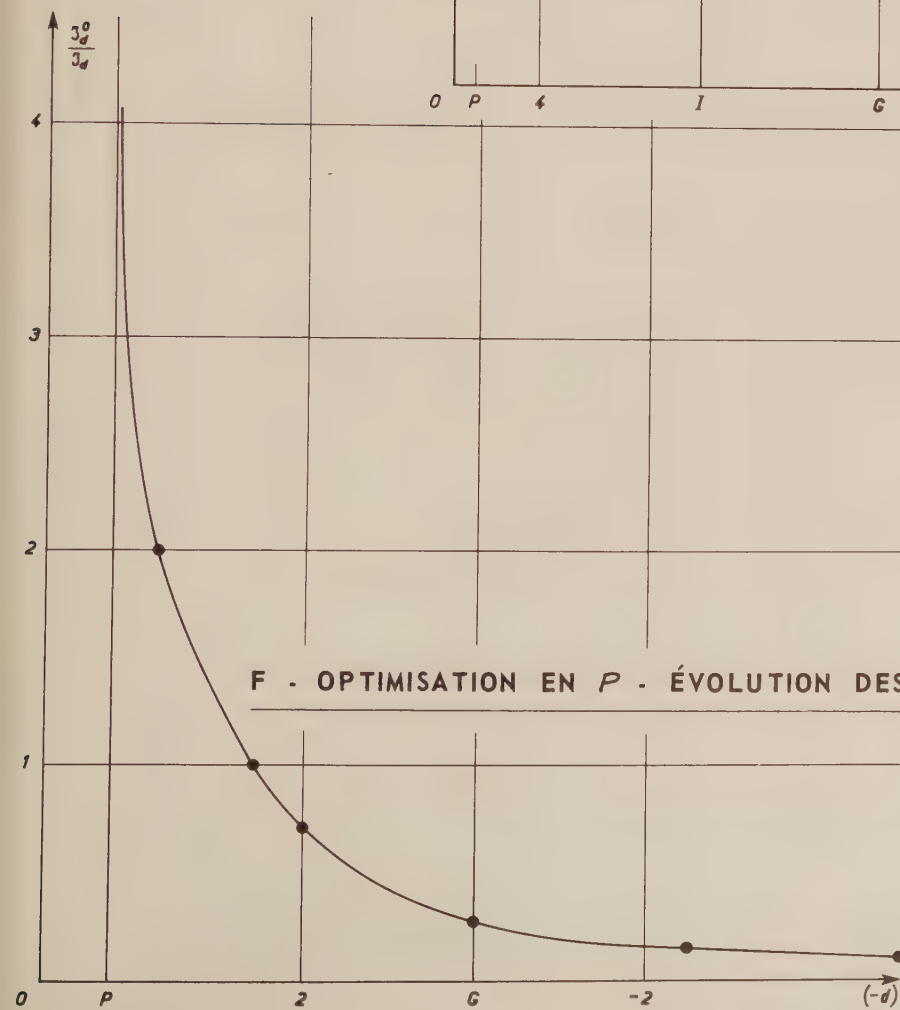
D - LOI OPTIMALE APPROCHÉE (V,8)

NOMBRE DE TERMES de la loi		DISTANCES EN m AU C.D.G.								
		2,10	2	1	0	- 1	- 2	- 3	- 4	- 4,77
gains $\frac{J_d^0}{J_d}$	3	115	7,35	2,228	2,188	2,039	2,130	2,262	2,421	2,558
	4	116	7,36	2,228	2,188	2,039	2,130	2,262	2,421	2,558
	5	117	7,37	2,228	2,188	2,041	2,132	2,264	2,423	2,561
	6	118	7,38	2,228	2,189	2,041	2,132	2,264	2,423	2,561

E - ÉTUDE COMPARÉE DES LOIS

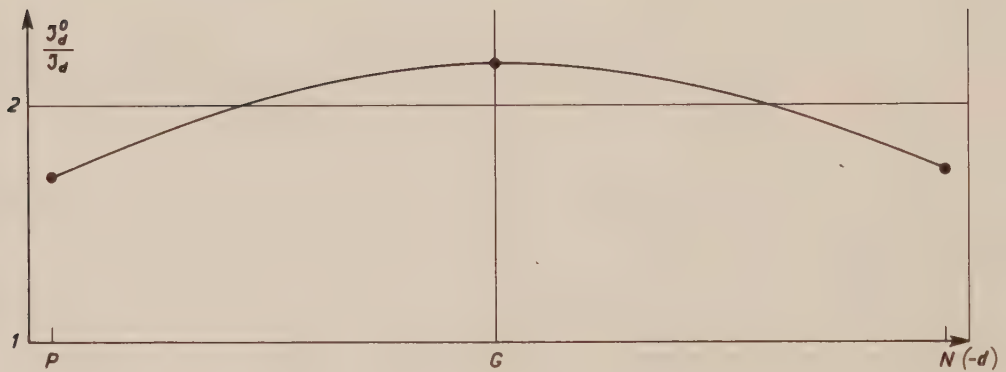


F - OPTIMISATION EN P - ÉVOLUTION DES GAINS LE LONG DE L'AXE

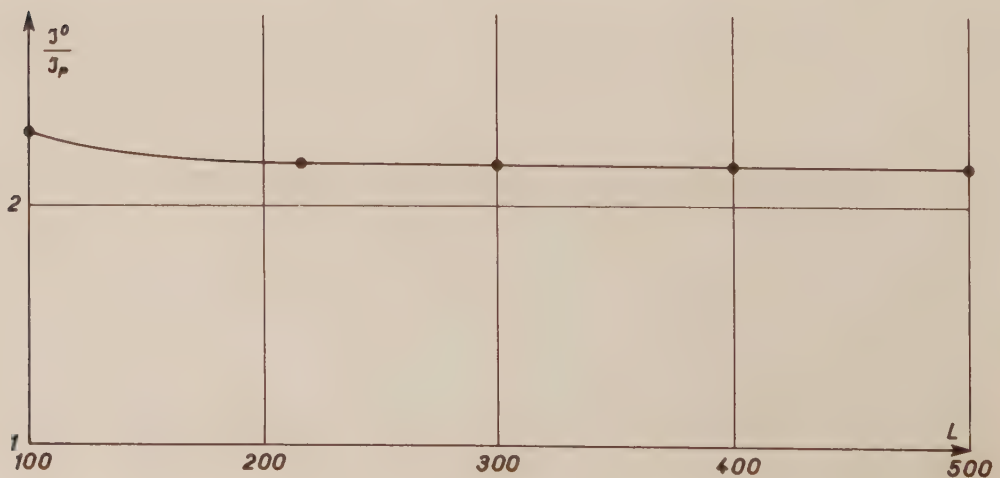


G - INFLUENCE DE L'OPTIMISATION EN G

NOMBRE DE TERMES DE LA LOI		3	4	5	6
gains $\frac{J_d^o}{J_d}$	Poste pilote P	1,694	1,692	1,687	1,687
	G optimisation	2,188	2,188	2,188	2,189
	point arrière N fuselage	1,702	1,708	1,725	1,729



H - OPTIMISATION EN G : INFLUENCE DE L'ÉCHELLE



K - INFLUENCE DE L'ÉVOLUTION DES COEFFICIENTS AÉRODYNAMIQUES

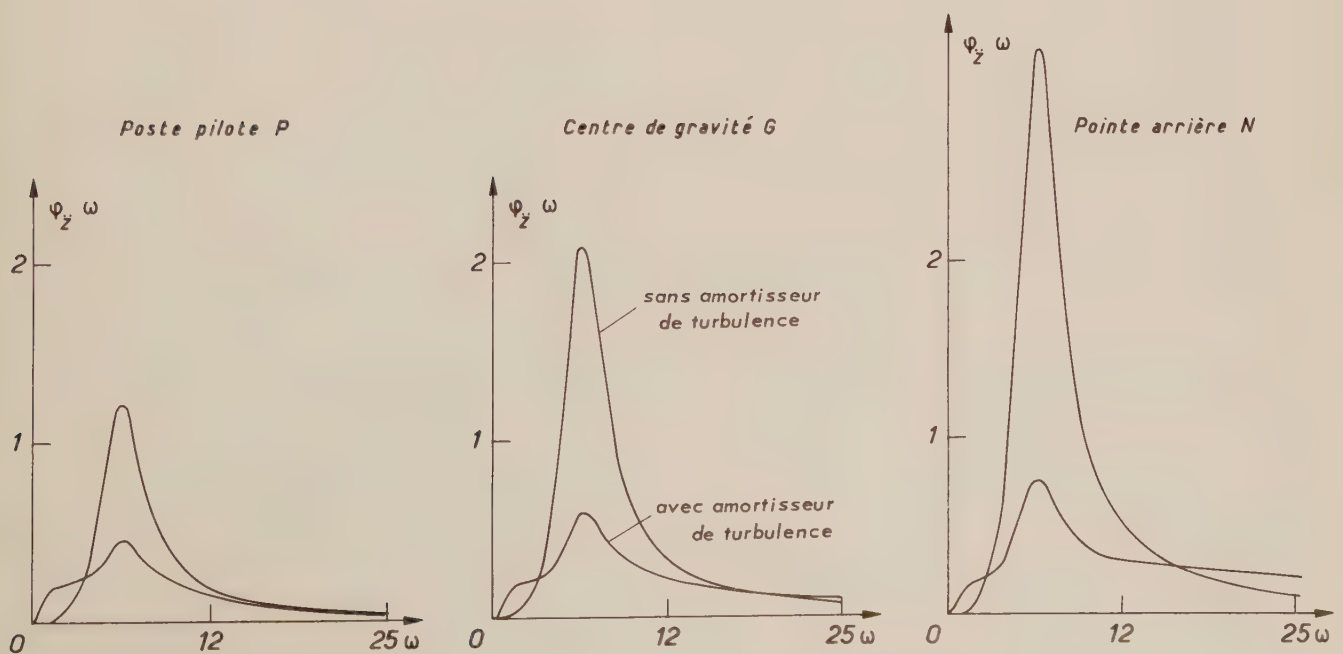
SUR L'OPTIMISATION EN G

On a supposé une variation prédominante de $C_{m,\dot{\epsilon}}$ et étudié la loi optimale pour des fréquences réduites f variant de 0,8 à 1,2.

gains en G : $\frac{\mathcal{I}^0}{\mathcal{I}_G}$

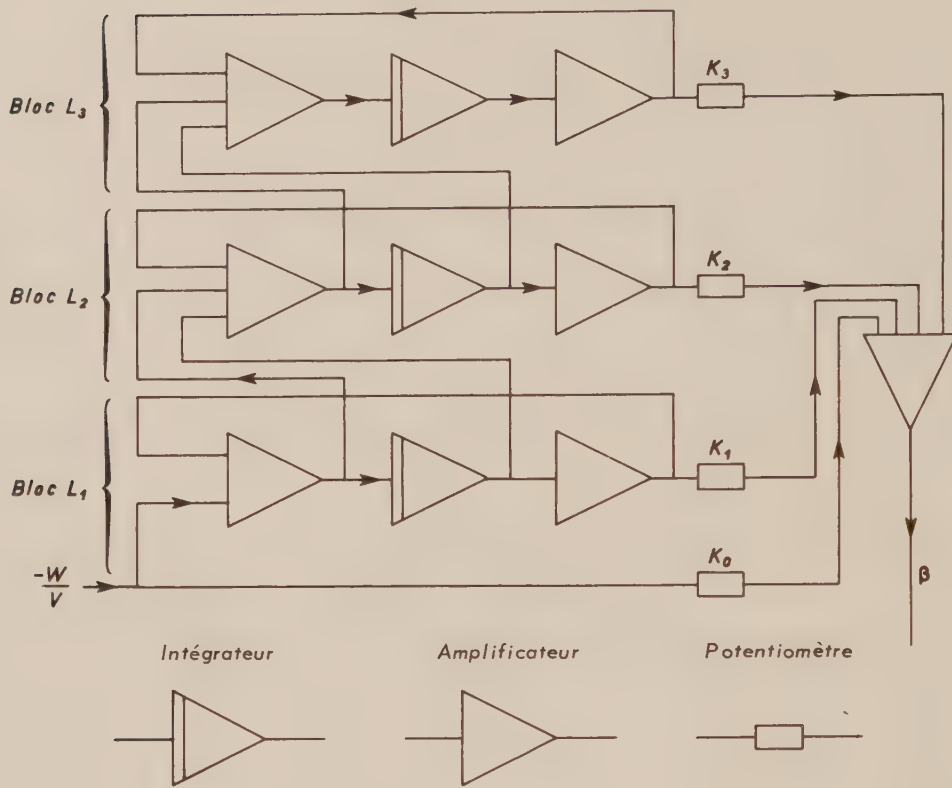
$f = 0,8$	$K(j\omega) = -1,51 + \frac{554}{j\omega + 17,87} - \frac{493}{j\omega + 16,77}$	$\frac{\mathcal{I}^0}{\mathcal{I}_G} = 1,916$
$f \simeq 1$	$K(j\omega) = -1,49 + \frac{534}{j\omega + 17,48} - \frac{597}{j\omega + 16,38}$	$\frac{\mathcal{I}^0}{\mathcal{I}_G} = 2,188$
$f = 1,2$	$K(j\omega) = -0,962 + \frac{513}{j\omega + 16,93} - \frac{462}{j\omega + 15,83}$	$\frac{\mathcal{I}^0}{\mathcal{I}_G} = 2,24$

L - DENSITÉS SPECTRALES DES ACCÉLÉRATIONS, LE LONG DE L'AXE

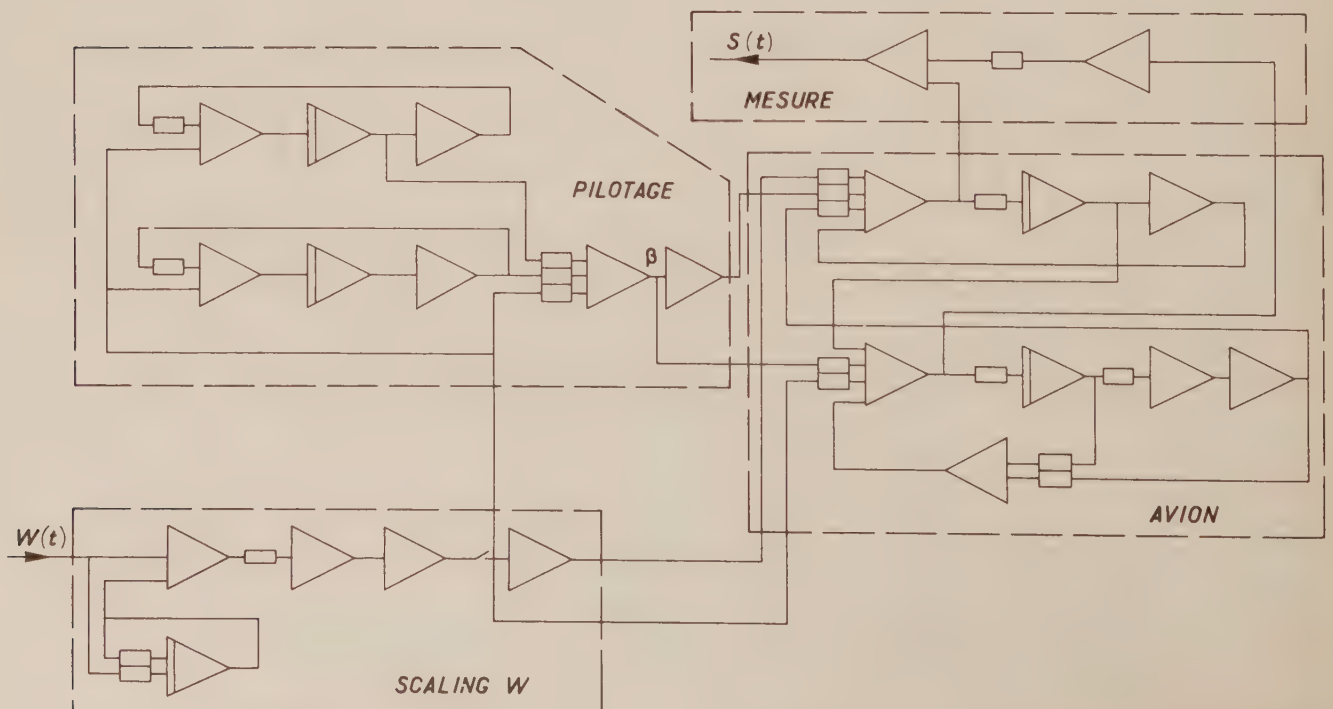


M - SCHÉMA BLOC ANALOGIQUE :

$$\beta(t) = \left(\left[K_0 + K_1 L_1 + K_2 L_2 + K_3 L_3 \right] * \frac{W}{V} \right)(t)$$



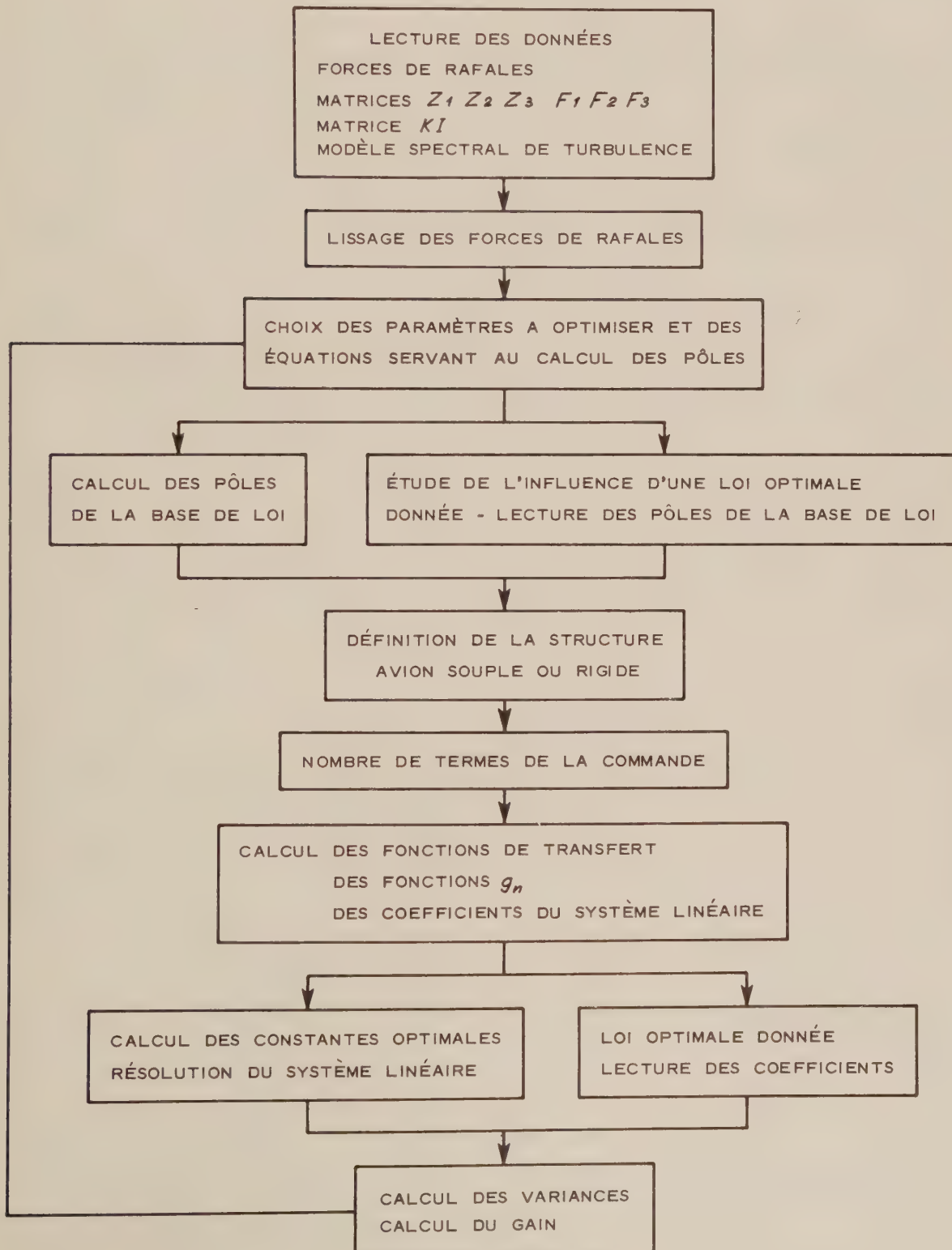
N - SCHÉMA BLOC DE LA CHAÎNE AVION ET DE LA CHAÎNE DE PILOTAGE



ANNEXE II

ÉTUDE DE L'AVION SOUPLE

1 - RÉOLUTION DU PROBLÈME D'OPTIMISATION : ORGANIGRAMME GÉNÉRAL



2 . QUELQUES RÉSULTATS DE L'ÉTUDE NUMÉRIQUE

Les courbes suivantes sont relatives à l'étude de la minimisation des accélérations en G , et de son influence sur les points P, EV, AR .

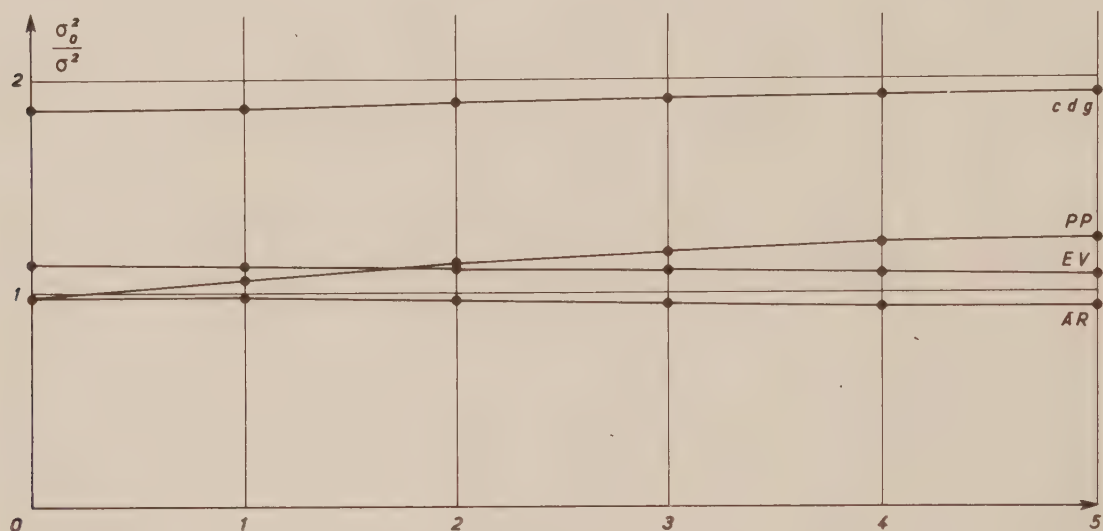
Les calculs sont effectués dans les conditions de vol : Mach 2,2 échelle de turbulence 300 m.

On a porté : en abscisses le nombre de termes correctifs $\sum_1^N \gamma_n \ell_n(\omega)$

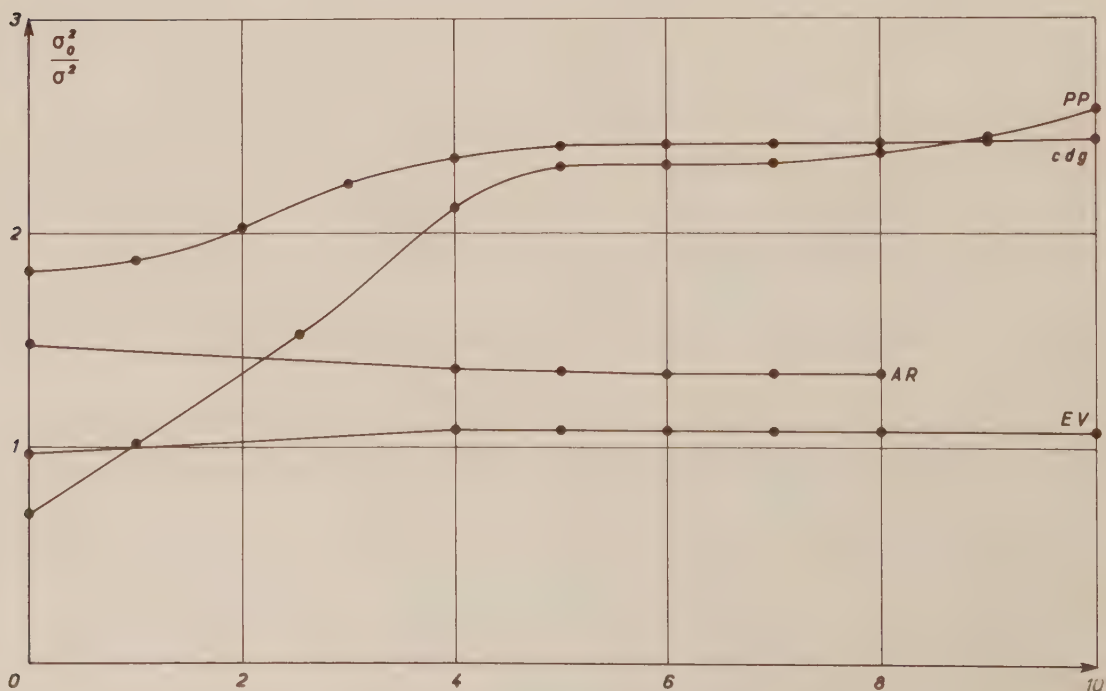
en ordonnées les gains $\frac{\sigma_o^2}{\sigma^2}$

a) pôles calculés à partir des équations 1, 2.

b) pôles calculés à partir des équations 1 et 4.



a) Influence de l'optimisation en G (pôles 1,2).



b) Influence de l'optimisation en G (pôles 1,4).

RÉFÉRENCES

Ouvrages

- [1] ASHLEY-BISPLINGHOFF - *Aeroelasticity*. Addison Wesley Publishing Company - Cambridge 1955.
- [2] BASS J. - *Eléments de calcul des probabilités* - Masson, Paris 1967.
- [3] BATCHELOR G.K. - *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press 1960.
- [4] CARTAN H. - *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, Paris 1961.
- [5] CHANG S.S.L. - *Synthèse des systèmes de commande optimale*. Dunod, Paris 1966.
- [6] DIEDONNE J. - *Fondements de l'analyse moderne*. Gauthiers Villars, Paris 1965.
- [7] FOX L. - *An introduction to numerical linear algebra*. Clarendon Press, Oxford 1964.
- [8] GANTMACHER F.R. - *Théorie des matrices*. Tomes I - II, Dunod 1966.
- [9] LECOMTE P. - *Mécanique du vol*. Dunod, Paris 1962.
- [10] LIUSTERNIR L. and SOBOLEV V. - *Elements of functional analysis*. F. Ungar Publishing Company - New York 1961.
- [11] MAZET R. - *Mécanique vibratoire*. Librairie polytechnique Béranger, Paris.
- [12] NASLIN P. - *Introduction à la commande optimale*. Dunod, Paris 1966.
- [13] NASLIN P. - *Théorie de la commande et conduite optimale*. Dunod, Paris 1969.
- [14] PALLU DE LA BARRIÈRE R. - *Cours d'automatique théorique*. Dunod, Paris 1966.
- [15] PANOFSKY H.A. and LUMLEY J.L. - *The structure of atmospheric turbulence*. Interscience Publishers 1964.
- [16] PAPOULIS A. - *The Fourier Integral and its applications*. Mc Graw Hill, New York 1962.
- [17] RIESZ F. et NAGY B.S.Z. - *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Gauthier Villars, Paris 1965.
- [18] SAATY and BRAM - *Non linear mathematics*. Mc Graw Hill, New York 1964.
- [19] SCHWARTZ L. - *Théorie des distributions*. Tomes I - II, Hermann, Paris 1957.
- [20] SCHWARTZ L. - *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, Paris 1961.
- [21] TORTRAT A. - *Calcul des probabilités*. Masson, Paris 1963.
- [22] TAYLOR J. - *Manual of aircraft loads*. Pergamon Press, 1965.
- [23] WIDER D. - *The Laplace transform*. Princeton University Press, 1946.
- [24] WIENER N. - *Extrapolation interpolation and smoothing of stationary time series*. MIT Press, 1964 (6^e édition).

Articles et publications

- [25] ANDREW G.M. and GARDNER F.H. - *Gust Alleviator and rigidity augmentor for supersonic airplanes*. Aerospace Engineering, (May 1962), p. 72.
- [26] DAVIS H.M. and SWAIM R.L. - *Controlling dynamic response in rough air*. AIAA Paper 66.997 (1966).
- [27] DEMPSTER J.B. and ROGER K.L. - *Evaluation of B-52 structural response to random turbulence with various stability augmentation systems*. AIAA Paper 66.998 (1966).
- [28] Mc CLEAN R. - *The optimization of an autopilot for an airplane subjected to random atmospheric turbulence*. University of Toronto n°45, (1960).

- [29] NAKAGAWA K. and MUROTSU Y. - *The optimization of airplane gust alleviation system*. Bulletin of University of Osaka, vol. 16, n°1, (1967) - vol. 17, n°1, (1968).
 - [30] SMITH R. and LUM E. - *Linear optimal theory applied to active structural bending control*. AIAA Paper 66.970 (1966).
 - [31] TOBAK M. - *On the minimization of airplane responses to random gusts*. NACA - TN 3290 (1957).
 - [32] WYKES J.H. and KNIGHT R.J. - *Progress report on a gust alleviation and structural dynamic stability augmentation system design study*. AIAA Paper 66.999 (1966).
 - [33] WYKES J.H. and KORDES E. - *Analytical design and flight tests of a modal suppression system on the XB-70 airplane*. Agard 34th Flight mechanics panel meeting 1969.
-
- [34] BASS J. et AGOSTINI L. - *Les théories de la turbulence*. Publication du Ministère de l'Air, n°237 (1950).
 - [35] BOUJOT J. - *Sur l'optimisation du pilotage d'un avion en turbulence..* C.R.Acad. Sc. Paris, t. 266, (1968), p. 360-362.
 - [36] BOUJOT J. - *Essai en vol d'un dispositif absorbeur de rafales. Configuration du système. Analyse*. O.N.E.R.A. - TP 698 (1969).
 - [37] BOUJOT J. - *Representation of causal functions. Application to direct and cross correlation*. O.N.E.R.A. - TP 726 (1969).
 - [38] BRYSON A.E. and HENRIKSON L.J. - *Estimation using sampled data containing sequentially correlated noise*. J. Spacecraft, vol. 5, n°6, (June 1968).
 - [39] BUCY R.S. and KALMAN R.E. - *New results in linear filtering and prediction theory*. Journal of basic engineering, vol. 83D, (March 1961), p. 95-108.
 - [40] COUPRY G. - *Evaluation rapide des caractéristiques statistiques des facteurs de charge dus à la turbulence*. O.N.E.R.A. - TP 256 (1965).
 - [41] COUPRY G. - *Vols en air turbulent*. O.N.E.R.A. - NT 78 (1965).
 - [42] KALMAN R.E. - *A new characterization of linear passive systems*. RIAS - Technical report 64-7, (April 1964).
 - [43] MARONI P. - *Eléments d'analyse fonctionnelle*. C.N.R.S. - Institut Blaise Pascal - XMM / 4-2-9/ AI (1969).
 - [44] PELLEGRIN M.J. - *Calcul statistique des systèmes asservis*. Publications Scientifiques du Ministère de l'Air, n°285 (1953).
 - [45] PRESS H., MEADOWS M.T. and HADLOCK I. - *A reevaluation of data of atmospheric turbulence and airplane gust loads for application in spectral calculations*. NACA Report 1272 (1956).
 - [46] RICE S.O. - *Mathematical analysis of random noise*. Bell Syst. Tech. Journal, Parts I-II, vol. XXIII, n°3, (Jul. 1944) - Parts III-IV, vol. XXIV, n°1, (Jan. 1945).
 - [47] ROCKAFELLAR R.T. - *Convex analysis*. Séminaire IRIA (1969).
 - [48] SALAÜN P. - *Fonctions spectrales compatibles avec la théorie d'Heisenberg en turbulence à symétrie axiale*. O.N.E.R.A. - TP 461 (1967).
-

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

ÉTUDE THÉORIQUE DES ÉQUATIONS DES FLUIDES DE BINGHAM

Vu et approuvé :

ORSAY, le 11 janvier 1971

Le Président de l'Assemblée Constitutive
de l'UNIVERSITÉ PARIS-SUD :

Signé : illisible

